Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

En el Universo de la Matemática Pura y Aplicada: La Teoría Matemática de la Música y su Tecnología.

Emilio Lluis-Puebla

www.imch.org.mx

INSTITUTO MEXICANO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
CIENCIA Y CULTURA PARA MÉXICO

Academia de Ciencias. Vol. 5 (2024)

En el Universo de la Matemática Pura y Aplicada: La Teoría Matemática de la Música y su Tecnología.[1]

Emilio Lluis-Puebla

Resumen: En este artículo se escribe acerca de cómo conceptos matemáticos, en especial los sistemas numéricos N, Z, Q, R y C intervienen en la Música. Se expone brevemente la historia de la conexión entre la Matemática y la Música y se señala al lector interesado dónde puede leer extensamente los ejemplos no desarrollados en este breve artículo. Se exponen conceptos donde la Música estaba antes que la Física y la Matemática, así como la Tecnología de la Música.

Muchos colegas y alumnos me han solicitado que les exponga la historia de la conexión entre la Matemática y la Música. En este artículo lo haré con brevedad al comienzo para posteriormente exponer cómo conceptos matemáticos, especialmente los sistemas numéricos intervienen en la Música. Casi todo lo escrito en este breve artículo de divulgación con fines educativos está contenido esencialmente en los libros [Mazz1], [Mazz2], [Mazz3] y [Mazz4] de Guerino Mazzola et al, esperando que sirva como motivación al interesado para adentrarse en estos fascinantes campos del conocimiento matemático y musical.

Tanto la Matemática y la Música tienen como origen de punto de unión a Pitágoras, es decir, ya desde Pitágoras hay una unión entre la Música y la Matemática.

Sin embargo, la Matemática y la Música son disciplinas del saber humano con diferentes desarrollos, perspectivas, lenguajes y metodologías. A pesar de sus diferencias, la creatividad en cada una de ellas es similar. He afirmado que ambas se crean de manera similar.

La Teoría de Motivos de Grothendieck fue concebida como idea musical de estructuras matemáticas fundamentales que actúan como motivos del gran concierto de la Matemática.

Veamos una breve historia de los destacados cerebros humanos que han intervenido en la interacción entre la Música y la Matemática.

Pitágoras fue un filósofo y matemático. Nació en la isla de Samos. Después de haber viajado a Egipto y probablemente a la India, se mudó a Croton en Magna Grecia alrededor del 530 a.C. y fundó su escuela. La escuela también era una especie de secta, y se informa que eran vegetarianos, pero esto no es un hecho históricamente firme, ya que también se informó que a los miembros de su escuela se les permitía comer todo tipo de carne, excepto de los bueyes. Pitágoras influyó en Platón en su concepto de que la matemática, en su abstracción, era una base segura de toda la filosofía y la ciencia.

La raíz griega μα΄θησις (mathesis) que significa conocimiento, da fe de esta comprensión. Según Bertrand Russell, debe ser considerado el filósofo occidental más influyente. También estaba muy adelantado a su tiempo, siendo el primero en creer que la Tierra es una esfera y orbita un punto fijo central. Un hecho más confiable es que su escuela tuvo que hacer un juramento sobre el Tetraktys, el símbolo cosmológico por el cual se conoce la filosofía y cosmología pitagórica.

El Tetraktys es un símbolo triangular construido a partir de diez puntos, diez es un número sagrado en la antigua Grecia. Los puntos se apilan en grupos decrecientes de 4,3,2,1 puntos. Esto genera una secuencia de fracciones

[1] Artículo correspondiente a la ponencia presentada en el XXIV Congreso de la SoBolMat. (08/11/2023).

2: 1, 3: 2, 4: 3, que se consideraron como consonancias básicas cuando se jugaban en el dispositivo experimental de Pitágoras, el monocorde. El monocorde tiene una cuerda. Su tono se duplica en una octava cuando la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, 1/2, proporciona una quinta más alta cuando su longitud se toma 2/3, y proporciona una cuarta más alta cuando se toma 3/4.

El aspecto musical del enfoque pitagórico no era hacer ninguna composición en el sentido moderno de la palabra. Intentarían escuchar la armonía oculta del universo que se creía representada por el símbolo de Tetraktys. Este símbolo jugó el papel de lo que la física contemporánea llamaría una "fórmula mundial". El Tetraktys era la fórmula del mundo pitagórico que describía el universo de manera matemática.

En este sentido, la música pitagórica era una ciencia experimental, y el monocordio era el instrumento experimental / máquina / campo de pruebas (como el papel del acelerador de partículas Large Hadron Collider (LHC) para el Centro Europeo de Investigación Nuclear (CERN) hoy). Por lo tanto, la escuela pitagórica fue el intento de unificar la Matemática y la Física en un paradigma sonoro. La música fue la expresión física de un principio cosmológico (el Tetraktys) de naturaleza matemática. La idea de la expresión artística individual en la música no era parte de la escuela pitagórica.

Las Artes Liberales, eran un canon medieval de educación para las personas libres (en oposición a los esclavos y siervos). Eran siete en número, dividido en dos grupos: el Cuadrivio, que comprende Música, Aritmética, Geometría y Astronomía (llamada Astrología en ese momento), y el Trivio, que comprende la Gramática, la Lógica (llamada Dialéctica), y Retórica. El punto notable aquí es que la Música y la Matemática, es decir, la Aritmética y la Geometría, se agruparon juntas. Esto se debe a la tradición pitagórica de ver a la Música como una Ciencia Matemática. Las Humanidades, agrupadas en el Trivio, fueron separadas de la Música. La tradición de agrupar la Música con las Humanidades se introdujo mucho más tarde, esencialmente debido a la interpretación psicológica de la música de Descartes. En los siglos XIX y XX, la Música ha sido redirigida a la Ciencia Matemática, principalmente debido al desarrollo de la Acústica y la naturaleza matemática de la Física Moderna.

Durante el Renacimiento, Gioseffo Zarlino (sXVI) reconoció el papel fundamental de la tríada mayor y menor relacionándola mediante simetría con la afinación justa. También desarrolló la afinación justa a partir de la afinación pitagórica agregando el intervalo de tercera mayor. Lo hizo agregando un renglón más al Tetraktys con 5 puntos.

La escala basada en igual temperamento fue calculada por primera vez por el matemático y músico chino Zaiyu Zhu en 1584. Esto permitió un hecho fundamental en la música y en la física, a saber, la modulación entre tonalidades mostrando que la matemática y la música nunca deben de estar separadas. Pasaron 150 años para que el "temperamento igual" se adoptara como base en la composición.

Su legado perdura hasta hoy, siendo el mejor sistema para la modulación musical. El propio Zhu comentaba que los educandos o estudiosos deben de estar bien familiarizados con la Acústica y con el cálculo matemático. Es de notar que 52 años después que Zhu publicó sus invenciones, Mersenne obtuvo los mismos principios utilizando a la matemática para resolver cuestiones musicales.

En el Barroco y en el Clásico, los compositores usaban técnicas matemáticas para crear música compleja. Estas técnicas les ahorraban mucho tiempo además de errores. J. S. Bach fue uno de estos compositores. Una explicación de cómo era posible que los compositores escribieran tal cantidad de música compleja de gran calidad artística (aunado a su genial talento) es debido a que usaban matrices, permutaciones, sucesiones de números, etc. es decir, usaban matemática para simplificar su proceso creativo, el cual les ahorraba una enorme cantidad de tiempo y lograban la precisión requerida.

Athanasius Kircher fue un hombre universal del Renacimiento en el sentido de que sabía de todo. Entre otras cosas, enseñaba matemática en su universidad. Fue el primero en observar microbios en un microscopio. En uno de sus libros desarrolla una aritmética de 36 conceptos básicos los cuales combina en 10^{67} combinaciones no manejables en su época.

Kircher trabajó en una teoría combinatoria en la música. El consideraba cualquier campo del conocimiento como un sistema de “Big Data”. Su acercamiento a la música seguía la tradición pitagórica en el sentido de que está relacionada íntimamente con la tecnología de su realización física y además demuestra que, en la música, el proceso de la tecnología siempre se refleja en la realidad musical.

Leonhard Euler (1707-1783) trabajó en la matemática pura y aplicada, en la Mecánica Celeste y de Fluidos, en la Lógica Formal y en la Teoría Matemática de la Música. Escribió 3 tratados sobre música. Su contribución más importante, es su definición del espacio geométrico de clases de altura en su tercer libro. Donde un espacio de dimensión 2 es generado por el eje de las quintas y el eje de las terceras mayores, conocido como el Espacio de Euler. Sin embargo, este trabajo fue demasiado matemático para los músicos y demasiado musical para los matemáticos.

En 1822, Joseph Fourier publica su trabajo más importante, “La Teoría Analítica del Calor”. En él aparece su famoso teorema acerca de la descomposición sinusoidal de las funciones periódicas. Este teorema es fundamental para la música pues las vibraciones del aire que percibimos con cierta altura son funciones periódicas de la presión del aire. Estas se representan como sumas de vibraciones sinusoidales que es lo que los teóricos de la música llaman “parciales”. Las descomposiciones de las parciales son parcialmente responsables del “color” del sonido de diversos instrumentos. La tecnología digital ha encontrado algoritmos para calcular rápidamente las parciales, haciendo efectiva la tecnología actual.

Herrmann von Helmholtz aplicó el Teorema de Fourier construyendo una máquina que llamó “resonador” que podía aislar las parciales de un sonido complejo y también a la consonancia de sonidos. Esto último es fundamental para la afinación de las cuerdas de un piano, por ejemplo.

El matemático, violinista y teórico musical Wolfgang Graeser (1906-1928), quien vivió solamente 22 años, realizó contribuciones de la Teoría de Grupos a la Música, así como a la Teoría Gestual de la Música. A los 17 años publicó su tratado El Arte de la Fuga de Bach” el cual revolucionó la Teoría Musical en general y en particular la obra póstuma de Bach. Explica con el concepto de simetría, el Arte de la Fuga. También explicó la estructura global en la música considerando las composiciones musicales como la resultante de adjuntar partes pequeñas. Graeser dejó el testimonio de la tensión entre las vibraciones musicales y los movimientos o gestos que las producen. Tomó casi 100 años en que los académicos pudieran comprender estos polos ontológicos.

Iannis Xenakis (1922-2001) fue un arquitecto, ingeniero, teórico musical y compositor. En 1979, utilizando su computadora pudo diseñar composiciones con base en gráficos bidimensionales. Antes, en 1963 publicó su libro “Música Formal: Pensamiento y Matemática en la Composición”.

Pierre Boulez (1925-2016) fue un compositor francés, teórico de la música, director de orquesta y organizador del IRCAM, (el Instituto de Investigación y Coordinación Acústica Musical) en París. Aplicó herramientas matemáticas a sus composiciones. El IRCAM es uno de los centros más destacados del mundo en cuanto a la creación musical. Incluye el Seminario MaMuX donde se ha desarrollado software musical como OpenMusic.

Alrededor de 1950 se estableció en Estados Unidos la corriente llamada “Teoría de Conjuntos Americana en la Música”. Su literatura fue esencialmente dedicada a estudiar propiedades específicas de conjuntos y colecciones, particularmente combinatoria y de partición. Se dice que sus conceptos estuvieron fuera de época desde el punto de vista matemático del siglo XX, que ignoraron conceptos básicos de la Teoría de Grupos entre otros. Casi todos sus resultados fueron de carácter combinatorio.

David Lewin (1933-2003) fue un teórico musical, compositor y matemático que comenzó a utilizar las acciones de grupos simples transitivas que dio lugar a considerar diagramas de flechas entre objetos musicales en lugar de conjuntos abstractos y también el acercamiento intuitivo gestual. Su tratamiento matemático fue un caso especial de la Teoría de Categorías introducida por Eilenberg y Mac Lane en 1945. Este ejemplo muestra lo importante que es para los teóricos musicales el saber matemática de la segunda mitad del siglo XX.

Guerino Mazzola (1947-) nació en Suiza y es considerado como el líder mundial de la Teoría Matemática de la Música. Fundó en los años ochenta la "Escuela de Zürich de la Teoría Matemática de la Música", como contraparte de la Escuela Americana. Es doctor en matemática, pianista de "Free Jazz", crítico y compositor. En 1985 publica su libro sobre grupos y categorías en la música en el cual utiliza matemática sofisticada como las Teorías de Módulos, Categorías y de Homotopía, así como Geometría Algebraica para construir modelos de modulación y de clasificación de estructuras musicales locales y globales. Con esto analizó la Sonata Op. 106 llamada "Hammerklavier" de Beethoven y compuso una sonata basada en el análisis de ella. Diseñó el software "presto" en 1989 y RUBATO en 1992.

Su obra fundamental es "The Topos of Music", (2002) la cual es una presentación extensa de la lógica geométrica de la teoría y ejecución musical basada en el marco conceptual de Denotadores y Formas utilizando técnicas sofisticadas de la Teoría de Topos iniciada por Alexander Grothendieck. Participaron en dicha obra 19 colaboradores de México, E.U., Francia, Alemania, Austria y Suiza desde 1997. Entre otros quien escribe y su alumna Mariana Montiel.

La Escuela de Zürich dio lugar a varios esfuerzos de desarrollo, el IFM (Institute for Fundamental Research in Music), de 1992 a 1999; el i2musics (internet institute for music science).

La primera década del siglo XXI fue germinal para la globalización de la Teoría Matemática de la Música. Se organizaron cuatro Seminarios Internacionales sobre Teoría Matemática de la Música e Informática Musical: El primero de ellos fue en Saltillo, México en el año 2000, organizado por quien escribe, Emilio Lluis-Puebla, durante el Congreso Anual de la Sociedad Matemática Mexicana continuado en las Facultades de Ciencias y de Música de la UNAM [Ll1]; El segundo seminario fue en Sauen, Alemania en el año 2001, organizado por Thomas Noll del Technische Universität Berlin; el tercero fue organizado por Guerino Mazzola en Zürich, Suiza en el año 2002 y el cuarto seminario fue organizado por Emilio Lluis-Puebla y Octavio Agustín-Aquino y tuvo lugar en Huatulco, México el año 2010, [Ll2].

En el año 2014 organizamos un Congreso Internacional de Teoría Matemática de la Música en Puerto Vallarta con la asistencia de expositores de muchos países estableciendo una vez más el crecimiento de nuestra disciplina, ver [Pa].

En el año 2006 se crea la SMCM (Society for Mathematics and Computation in Music) la cual cada 2 años realiza un congreso alternado entre los continentes europeo y americano. El del año 2017 lo organizó Emilio Lluis-Puebla junto con sus exalumnos Mariana Montiel y Octavio Agustín-Aquino en la Facultad de Ciencias de la UNAM, ver [Ll3]. En el 2019 se realiza en Madrid, España, ver [Mo]. Finalmente, por la pandemia se suspendió el del 2021 pero se realizó en Atlanta, Georgia en 2022, ver [Ll4].

En resumen, para aquellos que por primera vez se preguntan algo sobre la Matemática y la Música, permítanme decirles nuevamente, que nuestro campo es un área de estudio reciente y muy antiguo a la vez, como acabo de exponer. Al principio hubo una conexión de números y música desde Pitágoras, que se convirtió en un esfuerzo por decir cosas sobre música con cierta base. Descartes, Galileo, Kepler, Leibniz, Euler, d'Alembert, Helmholtz y algunos otros aparecieron en esta escena. En el siglo pasado, la acústica y su tecnología tuvieron mucho éxito al aplicar la matemática a la música, también la informática y algunos otros campos como la lingüística. Más tarde, el trabajo de Clough en 1979, Lewin en 1982 y Mazzola en 1985 inspiraron a los matemáticos interesados en la música y a los músicos interesados en matemática a continuar trabajando en la Teoría Matemática de la Música.

En la actualidad, es notorio que hubo una gran tendencia en las últimas cuatro décadas en la Matemática para hacer no solo aplicaciones sino también matemática nueva en una variedad de campos de conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción. Por lo tanto, la Teoría Matemática de la Música es un área de estudio reciente y también muy antigua. Desde Pitágoras hasta los años ochenta del siglo pasado, muy poca y no muy sofisticada matemática se encontraba en la escena de la Música. Fue cuando se usó la pesada maquinaria matemática y cuando la usaron los matemáticos suficientemente inteligentes y talentosos, que se creó la reciente Teoría Matemática de la Música.

La Teoría Matemática de la Música ofrece una nueva visión sobre la conceptualización musical, en particular el poder de generalización de los modelos y teoremas para los fenómenos musicales. Hacemos hincapié en el poder creativo de este enfoque, a diferencia de las teorías musicales conservadoras tradicionales. La Teoría Matemática de la Música, TMM en breve, es un término que fue introducido por Guerino Mazzola en 1981 para especificar una rama de la Teoría Musical que usaría los conceptos y teoremas matemáticos en lugar de la Teoría Musical Tradicional, donde los conceptos y métodos estaban dominados por una mezcla de perspectivas filosóficas, filológicas, psicológicas o cognitivas.

La necesidad de tal especificación fue impulsada por dos fuerzas, (1) la introducción de la tecnología informática (como sintetizadores o software de notación) a la música y (2) el fracaso de los enfoques tradicionales para resolver problemas fundamentales en la Teoría Musical y en la Ejecución Musical.

La TMM está compuesta de tres componentes: El lenguaje preciso que define los objetos y relaciones que no estaba presentes en la Teoría Musical Tradicional. La presentación de modelos para procesos armónicos, melódicos, rítmicos, de contrapunto, de voces líder o de ejecución musical. Y la experimentación de modelos teóricos.

La Teoría Matemática de la Música se basa en la Teoría de Categorías, en la Topología Algebraica; en particular, en las Teorías de Topos, Teoría de Módulos, Teoría de Grupos, Teoría de Homotopía, Teoría de Homología, Teoría de Grafos, Geometría Algebraica, solo para nombrar algunas áreas, es decir, en maquinaria matemática pesada. Su finalidad es describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ello es entender los aspectos de la música que son susceptibles a la razón de la misma manera que la física lo hace para los fenómenos naturales. Fue hasta las últimas cuatro décadas que ha habido un trabajo consistente en la Teoría Matemática de la Música.

Los números naturales son el primer tema estudiado por todos los estudiantes en los primeros años de la escuela primaria. Las definiciones clásicas de números ordinales y naturales se derivan enteramente de la teoría de conjuntos. Los cinco conocidos axiomas de Peano que definen a los números naturales se pueden presentar como un teorema.

El famoso matemático Leopold Kronecker (1823-1891) dijo: "Dios creó los números naturales, todo lo demás es trabajo humano". De hecho, los números naturales (que generalmente significan los números 1, 2, 3, ...) son la base de todo el razonamiento matemático y la arquitectura estructural. En vista de la declaración de Kronecker, los logros de la Teoría de Conjuntos también son notables, ya que desaprueban a Kronecker: ahora somos capaces de construir los números naturales (y, por supuesto, todos los demás) sin referencia directa a un creador divino, pero simplemente a la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

El concepto de número ordinal permite construir los números naturales. Los números ordinales se caracterizan por tres atributos simples, y las proposiciones correspondientes son fáciles de probar. No tienen un significado directo para la música hasta ahora. Sin embargo, es importante observar que, sin el concepto de número ordinal, no es factible una teoría limpia de los números. Los números ordinales son el eslabón perdido que llevó a Kronecker a creer que los matemáticos no pueden tener éxito por sí mismos.

La colección de todos los ordinales no es un conjunto, pero la elección inteligente de un buen subconjunto de esta colección produce el conjunto de números naturales. La definición de número natural y el ahora Teorema que expresa las antiguas axiomas de Peano lo puede ver el lector en [Mazz2]. Ahí está la definición clásica de números naturales dada por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Esta definición ahora tiene la forma de un teorema (por eso Kronecker estaba equivocado).

Observe que, en Matemática, Física y Ciencia de la Computación, los números naturales comienzan en 0, no en 1. Los números naturales también están omnipresentes en la música.

Veamos algunos ejemplos en la música: Contamos compases, generalmente comenzando en el compás 1. Pero como el inicio debe ser 0, comenzar en la medida 0 no sería una mala idea. Sin embargo, si el compás inicial está incompleto, numeramos el primer compás completo como el 1, por lo que el compás incompleto sería el número cero.

Dentro de una partitura determinada, contamos los tiempos, por ejemplo, el número de octavos (también llamados corcheas) en una posición determinada en la partitura. A menudo, a la afinación también se le asigna un valor de número natural, por ejemplo, en el código digital MIDI (Musical Instrument Digital Interface), donde el do central de un teclado tiene el número 60. MIDI es un código estándar para el intercambio de datos de una ejecución musical digital entre computadoras u ordenadores e instrumentos musicales electrónicos.

Para un intervalo musical, uno generalmente comienza con la nota, el tono o altura (frecuencia) de la nota inferior y cuenta el número de semitonos para alcanzar la nota superior. El intervalo unísono significa contar 0, la segunda menor tiene 1 semitono, la segunda mayor 2 semitonos, la tercera menor 3, la tercera mayor 4, la cuarta 5, el trítono 6, la quinta 7, la sexta menor 8, la sexta mayor 9, la séptima menor 10, y la séptima mayor 11 semitonos.

En la Composición Musical, hay un método sencillo para crear prototipos de melodías: el Dodecafonismo, inventado por el compositor y teólogo Arnold Schönberg alrededor de 1921. Ver este ejemplo en [Mazz2].

En la Teoría Musical, hay una Teoría de la Armonía que fue propuesta por Hugo Riemann llamada Teoría Funcional (Musical). Es una divertida coincidencia que también haya una Teoría Funcional (Matemática) (¡mismo nombre!) que fue desarrollada por Bernhard Riemann. Pero más allá de estas similitudes, las dos teorías no tienen nada en común. La Teoría Funcional Musical de Hugo Riemann fue el programa para atribuir a cada acorde posible una de las tres funciones armónicas posibles, Tónica (T), Dominante (D) y Subdominante (S). Esta idea definió un procedimiento para dar a las secuencias de composición de funciones armónicas el que representen el significado del movimiento armónico a través del tiempo.

Por ejemplo, la secuencia IC = {c, e, g}, IVC = {f, a, c}, VC = {g, b, d}, IC = {c, e, g} de acordes triádicos de grado (aquí en Do=C mayor), la tonalidad estándar de las teclas blancas del teclado cuando se inicia con la tecla tónica C. Esta secuencia cadencial se entiende como una abreviatura de la identificación armónica de la tonalidad dada (aquí, de hecho, una octava de la tonalidad C (aquí, de hecho, una octava de la tonalidad C se identifica como la unión IC ∪ IVC ∪ VC). En tal cadencia, el grado I se puede ver como el valor de función T, el grado V como el valor D y el grado IV como el valor S.

La idea de Riemann fue la de darle tales valores funcionales a todos los acordes, definiendo de manera efectiva el concepto de tonalidad mediante dicha función. Por lo tanto, la tonalidad de Do=C mayor se define como una función Tonalidad C: Ch → TDS = {T, D, S} cuyo dominio Ch es el conjunto de todos los acordes, que son por definición todos los conjuntos finitos en 2^N, donde N representa el conjunto de todos los tonos o notas o alturas o frecuencias. Sin embargo, esta idea de Riemann no funcionó debido a la carencia de orientación de la Banda de Moebius armónica. El interesado puede ver esto en la sección 16 de libro [Mazz2].

Otro ejemplo (del concepto de relación): si tomamos el conjunto Fin (N) $\subset 2^N$ de subconjuntos finitos del conjunto N de notas, estos subconjuntos se denominan acordes. Con la relación de inclusión $C \leq D$ sí, y sólo si $C \subset D$, tenemos un orden parcial entre los acordes. Los acordes que tienen dos elementos suelen denominarse intervalos. Los acordes que tiene solamente una nota se identifican con sus elementos individuales. En la Teoría Musical, el caso $C \leq D$ para un intervalo C es una propiedad importante de un acorde D, lo que significa que el intervalo C es parte del acorde D. En armonía, especialmente en la Teoría de la Modulación, el caso importante es cuando un acorde C es $\leq$ a dos acordes más grandes R, S.

Veamos otro ejemplo. Para un número natural n y un conjunto X, una sucesión de longitud n en X es una inyección t: $n \to X$. Si $X = P_{12}$, (las notas de Do=C a Si=B en el piano), una sucesión t: $3 \to P_{12}$ define un acorde de tres elementos, llamado tríada en la Teoría Musical. Por supuesto, el orden de las notas, por ejemplo, t = (c, g, e), no es importante al elegir un conjunto {c, e, g} con fines ilustrativos. Pero el orden en la secuencia es relevante si nos preocupamos por los miembros del conjunto, por ejemplo, si queremos conceptualizar las inversiones de acordes. Comenzando en e en {c, e, g}, luego tomando g, luego c, obtenemos la primera inversión de {c, e, g}, o comenzando en g, luego tomando c, luego e, define la segunda inversión de {c, e, g}. Este formalismo de sucesiones fue introducido en 1981 por Guerino Mazzola en su curso universitario sobre Teoría Matemática de la Música y en otro de sus textos para la clasificación de estructuras musicales generales; recientemente se ha aplicado bajo la palabra "orbifold" a consideraciones topológicas sobre la conducción de voces.

La aritmética de los números enteros permite operaciones sin restricciones en representaciones de parámetros musicales, tales como el de notas o los tiempos de inicio. Una primera operación con los números enteros es la transposición. Dado un entero $t \in Z$, se considera la función de transposición por t, denotada por Tt. Es la función Tt: $Z \to Z$ dada por $a \to$ Tt (a) = t + a. Claramente, Tt es una biyección en Z.

Una segunda operación en enteros es la inversión. La inversión también es una biyección en Z y se denota por Tt_. Está definido por Tt_(a) = t - a. Claramente, Tt_ ∘ Tt_ = IdZ. Tiene un punto fijo, es decir, Tt_(a) = a sí, y sólo si t = 2a es un múltiplo de 2, es decir, es un número entero par. Si t no es par, no hay un punto fijo.

En la música, los números racionales son muy importantes. Veamos algunos ejemplos básicos del uso de los racionales en el dominio musical. Para la notación de puntuación clásica, el eje horizontal representa el tiempo de inicio y la duración de las notas. Este tiempo musical no es la dimensión física, pero es un tiempo simbólico. Solo se interpreta en unidades físicas cuando se agregan reglas para la configuración del tempo. Por el momento solo queremos ver el tiempo simbólico que se indica en la partitura. En este entorno, el tiempo de inicio se divide en partes iguales, llamados compases. La duración de tales compases se indica al comienzo con una especificación del tempo. Los signos de duración de tiempo típicas se establecen.

Los signos de tiempo de un compás se parecen a los números racionales. Tienen un numerador y un denominador. Estos símbolos no son números racionales, pero representan racionales. No diré más al respecto aquí, pero si a usted le interesa puede consultar un libro sobre Teoría Musical.

Un ejemplo de números reales en la música está dado por el glissando. Un glissando es una ejecución muy rápida de las notas entre un punto inicial y un punto final. En la partitura, por lo general, solo se incluyen las primeras y últimas notas, junto con una línea de conexión. Mientras que un glissando en el piano implica frecuencias discretas, un glissando en un violín, por ejemplo, es "continuo" porque en las cuerdas se pueden realizar valores de frecuencia continua. Se piensa que el movimiento de un glissando se desliza a través de todos los números reales entre el tono inicial y el final. Sin embargo, la idea de una continuidad es delicada, ya que los números racionales también son "densos": entre cualquiera de los dos números racionales hay una infinidad de números racionales.

Recuerden la sucesión 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,..., es decir, la sucesión dada por la fórmula $u_1=u_2=1$ y $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ para n mayor o igual que 2. Esta sucesión se llama, sucesión de Fibonacci y sus términos, números de Fibonacci. Si consideramos $b_n=u_{n+1}/u_n$ como el cociente de crecimiento, obtendremos una sucesión, cuyo límite cuando n tiende a infinito es 1.618034...

Este número, juega un papel muy importante en la Geometría y en la Estética. Si dividimos un segmento de recta AB en un punto C tal que AB:AC=AC:CB tal división se llama *sección o razón áurea* (Kepler la llamó *proporción divina*). Si AB=1 y AC=x entonces x2+x-1=0. Luego x=.618034.... Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por .618034....

Este problema de proporciones fue discutido por primera vez por el matemático y cosmólogo Johannes Kepler en 1597. Además de ser un principio artístico de la construcción de proporciones estéticamente agradables, la proporción áurea está presente en muchos contextos biológicos y físicos. La proporción áurea fue usada por Bartok y Debussy, también se ha utilizado en composiciones de Karlheinz Stockhausen y Gérard Grisey.

La existencia de raíces n-ésimas es la base de muchos sistemas de afinación en la música. La afinación de 12 notas, donde la relación de frecuencia de octava se divide en 12 relaciones de frecuencia iguales de tamaño raíz doceava de 2 ≈ 1.059463094359295 ... .

Para las afinaciones micro tonales, por ejemplo, la afinación de cuarto de tono o de 24 notas por octava, se necesita la relación de frecuencia de raíz 24 de 2 ≈ 1.029302236643492 ... .

La selección de tonos o notas o frecuencias musicales admisibles para una afinación es un tema importante para la construcción de instrumentos musicales y para la Teoría Musical.

Para instrumentos de cuerda, cualquier tono concebible puede ser tocado dentro del rango del instrumento, pero para los teclados, solo está disponible un subconjunto discreto de frecuencias o notas o tonos. En Teoría Musical, no se concibe la totalidad de las posibles frecuencias o notas o tonos.

Pero ¿qué es el tono, nota o frecuencia? En la Física, los sonidos con un tono determinado se generan por una variación de la presión de aire p(t) (en pascales, donde un pascal (Pa) es la fuerza de un Newton por metro cuadrado N / m^2) en función de tiempo t (en segundos (segs), por ejemplo) que muestra periodicidad, es decir, repite su forma después de un período de tiempo P.

La frecuencia de una función de presión se define como f = 1 / P si P es el período de tiempo, y la unidad de frecuencia es Hertz, Hz = 1 / segundo. Por ejemplo, el *la* para la música de cámara es frecuentemente (pero no siempre, algunas regiones tienen estándares ligeramente diferentes) 440 Hz.

Sin embargo, los humanos no percibimos la frecuencia como tal. Es el logaritmo Pitch (f) = log (f) lo que nuestro cerebro percibe como tono o nota o frecuencia. Esta ley se llama la ley de Weber-Fechner. Por ejemplo, si nos dan un tono o nota Pitch(fc) = log (fc), digamos el do=c del medio del teclado de un piano, entonces la octava c´ de este tono o nota tiene la doble frecuencia 2fc. Esto se traduce a la ecuación logarítmica Pitch(2fc) = log (2) + log (fc).

En otras palabras, subir una octava significa agregar el registro constante log(2) al tono dado. Esta es la razón por la cual la distancia entre las notas una octava en el piano es constante. Si el teclado tuviera que representar las diferencias de frecuencia, las octavas se separarían cada vez más a medida que las teclas van hacia la derecha. De c a c´ tenemos 2fc - fc = fc, pero para c´´ tenemos 4fc - 2fc = 2fc, el doble de la diferencia de la octava anterior.

Las afinaciones musicales se definen por fórmulas matemáticas que especifican afinaciones admisibles. Ver [Mazz2] para más sobre este tema.

Es un problema filosófico profundo concebir una ontología que comprende las coordenadas cartesianas res cogitans (la cosa pensante) y la res extensa (la cosa extendida), es decir, las ontologías mentales y físicas. Esta famosa dualidad cartesiana se puede resolver en principio usando números complejos. Uno considera el producto cartesiano $R^3 \times C$. El componente tridimensional R^3 transporta las coordenadas espaciales, mientras que el factor complejo C se divide en el real R y el imaginario iR. Esto define dos subespacios. El espacio "físico" $R^3 \times R$ con el eje real R para el tiempo físico, y el espacio "mental" $R^3 \times iR$ con el eje de tiempo "imaginario" iR. El primer subespacio representa al cartesiano res extensa, mientras que el segundo espacio representa al cartesiano res cogitans.

Este modelo ontológico se puede aplicar a la música, donde la partitura es posicionada en la componente mental, y su ejecución física vive en el componente físico. Esto implica que nuestra actividad mental, mientras pensamos en la partitura o la estamos creando como un conjunto de símbolos, ocurre en el tiempo imaginario, mientras que la ejecución tiene que cambiar el tiempo a su componente real. En el modelo de Mazzola, él ha desarrollado una teoría de la transición del tiempo imaginario al tiempo real utilizando ideas de la teoría física de cuerdas. En este modelo, no solo hay estados imaginarios y físicos, pero también diseña una familia completa de estados intermedios que comparten tiempo real e imaginario.

Otro ejemplo: En la Tecnología del Sonido, los números complejos son indispensables. Al describir sonidos que tienen una frecuencia determinada, existe una teoría matemática clásica que satisface las necesidades de una descripción completa, a saber, el formalismo descubierto por Joseph Fourier hacia 1800. Su teoría permite la descomposición de una función de sonido como una suma de funciones sinusoidales, llamadas parciales. Para realizar cálculos con la Teoría de Fourier, se trabaja con números complejos. La Teoría de Fourier también se ha aplicado para crear algoritmos rápidos para el cálculo de datos numéricos asociados con las parciales. El más famoso se llama "Fast Fourier Transform" (FFT). Es la base de la tecnología del sonido global basada en Internet. La transmisión rápida de datos de sonido sería imposible sin FFT.

Veamos a continuación un poco más acerca de la Matemática y la Música.

Primero: la historia de la Matemática y de la Música demuestra que estas disciplinas difieren en metodología, lenguaje y posición existencial, por lo que ya no sería posible identificarlos como antes.

Segundo: la diferencia en sus perspectivas es una fuerza importante para la interacción creativa, y esta es una de las razones principales de la importante inspiración mutua que la matemática y la música se han dado una a la otra.

La historia de la música tiene una interacción notable con el desarrollo de otras ciencias. Es interesante, por ejemplo, enumerar algunos puntos donde la Música y su teoría estaban antes que la Física:

La fórmula del mundo pitagórico de Tetraktys fue un paradigma musical que podría ser materializado solo mucho más tarde, en la Física Teórica del siglo XX.

La Teoría de los Gestos en la Música se desarrolló mucho antes que la Teoría de Cuerdas en la Física. Los gestos son conceptos teóricos esenciales en la Teoría de la Ejecución Musical, tal como lo describen Graeser, Adorno, Sessions y Lewin.

Las Leyes de Kepler que describen el movimiento de los planetas fueron musicalmente motivadas cuando estaba buscando fracciones de intervalo musical (3/2 para la quinta, etc.) para entender la Astronomía.

En la Teoría Musical, los tres intervalos armónicos básicos, octava, tercera y quinta, se concibieron como direcciones armónicas independientes, una interpretación que más tarde podría confirmarse matemáticamente cuando los matemáticos introdujeron el concepto de independencia lineal en el Álgebra Lineal.

La Teoría de Topos de Grothendieck fue aplicada por Mazzola en la Teoría Musical antes de la aplicación de la Teoría de Topos en la Física.

Las simetrías como herramientas fundamentales para la Teoría Musical fueron aplicadas en la música por el teórico y matemático Wolfgang Graeser cuatro años antes que en la Física por Emmy Noether.

La reciente inspiración del gran matemático Alexander Grothendieck (1928-2014) para su mayor desafío intelectual, la idea de una Teoría de Motivos se entendió como una idea musical de estructuras matemáticas fundamentales que actúan como motivos musicales en la gran sinfonía de la matemática.

Y una feliz o triste anticipación: el negocio de la música se destruyó antes de la catástrofe de fuentes abiertas en las ciencias.

Experimentos contrapuntísticos en la composición musical fueron realizados a partir de la polifonía temprana alrededor del año 900 d.C., antes de que los experimentos de Galileo tuvieran lugar en la física en el siglo XVII.

Mazzola propone la imagen de una interacción "matemático-musical" que exprese la atmósfera general de dicha interacción. Esta imagen es la de un contrapunto de dos voces, el cantus firmus de la Matemática y el discanto de la Música, que interactúan en armonía consonante, pero se mueven de manera creativa en el eje del tiempo a través de la historia y se despliegan en una tensión contrapuntística de voces autónomas, pero profundamente conectadas.

Similar al contrapunto, la matemática y la música presentan diferentes perspectivas de la imagen total. Hay dos componentes fundamentales: fórmulas y gestos. Las fórmulas musicales son bien conocidas, por ejemplo, la forma ternaria A - B - A, o la fórmula de cadencia I - IV - V - I en armonía. Pero la música no puede reducirse a tales formas (ula) s; necesita desplegar sus sonidos en el tiempo y el espacio.

El objetivo de este despliegue es la acción gestual de los músicos. En otras palabras, la música transfiere fórmulas a gestos cuando los intérpretes interpretan las notas escritas, y cuando los compositores despliegan fórmulas en los gestos de la partitura. Del mismo modo, los matemáticos hacen matemática; no sólo observan fórmulas eternas. En álgebra, mueven símbolos de un lado de una ecuación al otro. La matemática prospera por acciones intensas y altamente disciplinadas. Nunca se entenderá la matemática si no se "juega" con sus símbolos. Sin embargo, el objetivo matemático no es una actividad manipuladora; es el logro de una fórmula que condensa y compacta sus gestos manipuladores. La matemática, por lo tanto, comparte con la música un movimiento entre gestos y fórmulas, pero se mueven en la dirección opuesta al proceso musical.

El famoso teórico de la música Eduard Hanslick en su libro Vom Musikalisch-Schönen define el contenido musical como "Sonando Formas en Movimiento", no solo formas, sino "formas que se mueven en el sonido". De hecho, el aspecto formal, la fórmula, de una cadencia, por ejemplo, no es suficiente para generar contenido. La forma (ula) se debe mover, por lo que se implementa en una dinámica gestual. Y Hanslick ilustra su idea con el caleidoscopio, una disposición dinámica de formas que reciben su valor estético en una relación interna autorreferencial.

Trabajar con fórmulas matemáticas no garantiza buenos resultados musicales. Esto también es válido para un buen piano: siempre se puede reproducir música mala en cualquier instrumento, incluso en reproductores de música digital. Pero los instrumentos pueden ayudar a dar forma a los pensamientos musicales de una manera compacta y precisa. Por ejemplo, en el enfoque de la música espectral, se necesitaron representaciones matemáticas muy precisas de colores de sonido complejos (timbres) y se aplicaron para definir esas composiciones. El espectralismo se originó en Francia a principios de la década de 1970 y las técnicas se desarrollaron en el IRCAM (Instituto de Investigación y Coordinación Acústica / Musical) con sede en París, con sus computadoras y con el Ensemble l'Itinéraire, por compositores como Gérard Grisey y Tristan Murail.

El estilo de la creatividad musical puede ser muy diferente, trabajar con una estructura armónica o rítmica abstracta, una dinámica gestual continua, o bien con la teoría de la probabilidad y las estadísticas. Para cada estilo, hay lenguajes matemáticos, teorías y, a menudo, tecnología de software que pueden ayudar a dar forma a las fantasías creativas.

Hemos visto cómo el conocimiento sobre cómo pasar de una fórmula a un gesto y viceversa puede generar inspiración para una creatividad que trasciende los sueños románticos puros (que generalmente no producen sonido), o pesadillas. Recordemos que el gran novelista Hermann Hesse (1877-1962) recibió el Premio Nobel de Literatura en 1946 por su novela Das Glasperlenspiel (The Glass Bead Game), que describe esencialmente un sofisticado juego futurista que intercambia fórmulas matemáticas y composiciones musicales.

Las estructuras matemáticas, las fórmulas y las metodologías siempre han desempeñado un papel crucial en la construcción creativa de la música. Bach utilizó las simetrías de retrógrado e inversión; Mozart inventó el juego de dados musical; Bartók aplicó los números de Fibonacci para organizar el tiempo, Messiaen, Boulez, Pousseur, Eimert, Stockhausen y otros aplicaron la Teoría de Grupos para crear sus composiciones en serie, extendiendo las ideas dodecafónicas completamente matemáticas de Schönberg y Hauer.

La Tecnología de la Música no solo comprende conceptos básicos de la acústica y los enfoques analógicos y digitales de este conocimiento específico, sino que también incluye aspectos computacionales con sus especificaciones matemáticas y orientadas al software. Su objetivo fue el de trascender una discusión puramente cualitativa sobre el progreso reciente mediante una rigurosa introducción a los métodos cuantitativos, matemáticos y computacionales que son cruciales para la comprensión de lo que está en juego en este campo de la creatividad musical asistida por computadora.

El texto [Mazz3] está dirigido a cualquier persona que quiera aprender las metodologías básicas de este campo desde el principio. Además de su experiencia con la curva de aprendizaje de los estudiantes durante su desarrollo pedagógico en el curso, decidieron los autores producir un texto que pueda ser comprendido por estudiantes universitarios de música, y no solo por una audiencia que ya conoce métodos y datos matemáticos y computacionales. Por lo tanto, su enfoque fue impulsado por la condición de que cada oración de este libro debe expresarse en un estilo que pueda ser apreciado por lectores no especializados.

La Tecnología Musical se ocupa del conocimiento y los motores para la creación y gestión musical. Incluye dispositivos mecánicos y electromagnéticos, como instrumentos musicales, generadores de sonido eléctricos y tecnología orientada a la computadora con su software.

A pesar de la palabra moderna "tecnología", la música estuvo desde sus inicios íntimamente relacionada con los ámbitos tecnológicos. Ya los primeros instrumentos, como la flauta ósea de 50,000 años de edad, descubierta en el sur de Alemania, y la lira de la antigua cultura griega, son simples dispositivos tecnológicos para la producción de sonidos musicales. La escuela pitagórica alrededor del 500 a. C. agregó una base de conocimiento a sus instrumentos musicales, generando el concepto matemático de largo alcance de un intervalo consonante en su fórmula metafísica del Tetraktys. Esta base conceptual de la música también se realizó en otras culturas, como, por ejemplo, la afinación de campanas en China alrededor del 433 a. C.

En este sentido, la música siempre ha estado sustancialmente entrelazada con su tecnología. La música sin tecnología sería como una receta sin cocinar, un absurdo abstracto que no tiene ningún significado sustancial. Pero tenemos que ser conscientes de que la música se involucra profundamente en un diálogo equilibrado entre el conocimiento y su realización técnica. La creación musical depende fundamentalmente de las lecciones de la Acústica y la Teoría Musical sobre la construcción de hardware instrumental.

Por ejemplo, la geometría del teclado del piano es una consecuencia directa de que el tono es el logaritmo de la frecuencia: todas las octavas son equidistantes. Otro ejemplo es la selección de tonos de la escala principal: las teclas blancas. Y viceversa: la Teoría Musical en el sentido más amplio de la palabra refleja el impacto de las construcciones instrumentales. Por ejemplo, la penetración de los espectros de sonido por instrumentos electrónicos ha implicado la teoría de la música espectral con el desarrollo de conceptos teóricos que incluyen el timbre y no solo los parámetros de tono e inicio.

RUBATO es un entorno de software musical universal desarrollado desde 1992 en el Departamento de Informática de la Universidad de Zúrich, bajo la dirección de Guerino Mazzola. RUBATO se basa en los conceptos, modelos y resultados de la Teoría Matemática de la Música moderna y, por lo tanto, realiza una poderosa estrategia de investigación y desarrollo a largo plazo en el campo de la informática musical. RUBATO está diseñado para la interacción colaborativa de componentes para tareas específicas como análisis, composición, ejecución y operaciones lógicas o geométricas.

Dicho componente se llama RUBETTE® y, en principio, puede servir para cualquier tarea siempre que su interfaz con otros RUBETTE se base en el intercambio del formato de datos universal de los denotadores. Respaldados por una colaboración científica internacional, RUBATO y sus RUBETTE se han realizado en varias implementaciones que dependen de la plataforma y ahora está disponible como un software Java de código abierto e independiente de la plataforma con el nombre en código RUBATO composer.

El sistema Rubato Composer está abierto a una extensión arbitraria y está disponible gratuitamente bajo la licencia GPL. Permite al desarrollador crear rubettes especializados para tareas que son de interés para los compositores, quienes a su vez los combinan para crear música. Igualmente sirve a los teóricos de la música, que los utilizan para extraer información y manipular estructuras musicales. Incluso pueden desarrollar nuevas teorías al experimentar con los muchos parámetros que están a su disposición gracias a la mayor flexibilidad de la arquitectura de concepto funcional.

Resumiendo, el largo proceso histórico del contrapunto de la Matemática y la Música ahora ha conducido a una síntesis de Arte y Ciencia que recompensa los apasionados y, a menudo, desesperados esfuerzos por reunir la Belleza con la Verdad.

Desde los años setenta del siglo pasado trabajé en la Teoría de la Homotopía, la Teoría de la Cohomología, la Topología Algebraica, el Álgebra Homológica, entre otros campos de la matemática. En la década de los setenta, estas fueron consideradas como Matemática Pura. Sin embargo, cuarenta y tres años después, estas maravillosas piezas de matemática se convierten en Matemática Aplicada y Tecnología y miren en dónde: en mi otro campo de pasión, la Música. Pero "ojo", no sólo es aplicar la Matemática, es también, el crear nueva matemática dentro de la TMM.

Deseo finalizar este breve artículo estableciendo una vez más, que la Matemática es una de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Bibliografía y Referencias

[Ll1] Lluis-Puebla, E; Mazzola,G; Noll, T. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. epOs. Osnabrück, Alemania. ISBN: 3-923486-57-x y 3-923486-58-8. (2004). https://www.epos.uni-osnabrueck.de/buch.html?id=48

[Ll2] Lluis-Puebla, E; Agustín-Aquino, O. Memoirs of the Fouth International Seminar on Mathematical Music Theory. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana. Serie Memorias. Vol. 4. 2012. http://pesmm.org.mx/Serie%20Memorias_archivos/Mem4.pdf

[Ll3] Lluis-Puebla, E. et al. Mathematics and Computation in Music. Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI) 10527. Springer International Publishing. (2018). ISSN 0302-9743. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-71827-9?noAccess=true

[Ll4] Lluis-Puebla, E. et al. Mathematics and Computation in Music. Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI) 13267. Springer International Publishing. (2022). ISSN 0302-9743. ISBN 978-3-031-07014-3. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-07015-0

[Mazz1] Mazzola, G. et al. The Future of Music. Springer. (2020)

[Mazz2] Mazzola, G. et al. Cool Math for Hot Music. Computational Music Science. Springer (2016).

[Mazz3] Mazzola, G. et al. Basic Music Technology. Computational Music Science. Springer. (2018).

[Mazz4] Mazzola, G. et al. The Rubato Composer. Computational Music Science. Springer. (2009).

[Mo] Montiel, M. Gómez-Martín, F. Agustín-Aquino, O. Mathematics and Computation in Music. LNAI 11502. Springer. (2019).

[Pa] Pareyón,G. Piña-Romero, S. Agustín-Aquino, O. Lluis-Puebla, E. The Musical-Mathematical Mind. Computational Music Science. Springer. (2018). https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-47337-6

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
www.EmilioLluis.org, lluisp@unam.mx