

**Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades**

**Tensiones formales entre
Matemática y Música.**

Emilio Lluís-Puebla

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 4 (2024)



Tensiones formales entre Matemática y Música

Emilio Lluís-Puebla

La Música y la Matemática
se resuelven en una
forma superior: el Arte.

Contenido:

- 1.- Arte y Bella Arte
- 2.- Juegos musicales
- 3.- Denotadores y Rubato
- 4.- Fórmulas y gestos
- 5.- Diagrama de Peirce
- 6.- El trabajo de Nahre Sol
- 7.- Presentación de los temas
- 8.- Ligadura con la Poesía

1.- Arte y Bella Arte

La palabra arte significa “el conjunto de reglas o procedimientos para hacer algo”. El aplicar el conjunto de reglas a menudo se llama técnica. Así, existe el arte culinario, el arte de la Tauromaquia, el arte decorativo, el arte egipcio, el arte romano, el arte barroco, las artes utilitarias, las artes liberales o bellas artes, el arte poético, el arte musical, el arte matemático, etc.

También, la palabra arte designa lo creado por los seres humanos. El sonido emitido por un ave no se considera arte. Existen innumerables teorías del arte. También se usa la palabra arte para designar un arte que es creativo o alguna de las Bellas Artes, que son las que tienen por finalidad expresar la belleza.

Hay un término que se usa en inglés, “art music”, para designar el tipo de música que requiere de un esfuerzo de atención y comprensión por parte del oyente para poder apreciarla. En español no existe de forma usual el término “música de arte”, ni tampoco, “música con valor artístico” o “música erudita”, pero sí se usa el término “música clásica” o “música seria”. En este tipo de música se entiende que tiene una estructura, una forma, se establece por escrito, se compone sin algún fin utilitario o comercial, etc.

Entiéndase por “esfuerzo” el trabajo mental o conexiones neuronales. El hacer conexiones neuronales es una de las actividades más difíciles para el ser humano. No cualquiera está dispuesto a realizarlas. Son las que dan lugar, en términos económicos, al “Capital Humano”.

Hay varios tipos o clases de música: la música popular o comercial, la música folclórica, la música de jazz, la música de arte, (esta última a veces se le llama música con valor artístico, o música artística, o música seria, o música clásica, o música académica, o música erudita, etc.).

Hay que tener en cuenta que la Música es una actividad exclusivamente humana, terrícola, destinada a escucharse por uno de los sentidos, el auditivo, en una capa de la atmósfera terrestre muy pequeña, la troposfera. Es decir, el sonido es esencialmente vibraciones de una parte de la capa atmosférica.

Es muy pretencioso decir que es un lenguaje del universo, o universal como frecuentemente se dice. Hay música de arte que no está creada para comunicar, puede simplemente estar creada por el placer de escuchar o **jugar con los sonidos**. Actualmente, la música de arte existe por sí misma. La música utilitaria es parte de alguna actividad, ya sea la danza, la religión, el baile, la ópera, la opereta, la zarzuela, la marcha militar, el deporte, la relajación, etc.

La música no es la única actividad humana que emplea el sonido, el lenguaje también usa el sonido como medio de transmisión. Sin embargo, el lenguaje trata de transmitir conceptos específicos y la música no necesariamente. La música puede expresar emociones o ideas específicas, pero lo hace mediante asociaciones. La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano.

El sonido es el medio de transmisión de la música y consiste en vibraciones del aire. Este último es un gas, cuyas moléculas y átomos no están tan juntos como en un sólido o líquido. Si usted se lleva un violín a la Luna esperando escuchar una bella pieza musical, se llevará una sorpresa. No escuchará nada pues hasta donde se sabe, no hay aire.

2.- Juegos musicales

Puedo decir que la Música de Arte es un juego inteligente (en el que se tiene la capacidad de entender o comprender (RAE)) con las vibraciones del aire. Hay juegos triviales y no triviales. La Forma es la disposición, estructura o arreglo de los elementos musicales básicos. La música de algunas regiones del planeta requiere de entrenamiento especial para entenderla si es que ésta representa lenguajes. Por ejemplo, las tribus brasileñas o africanas.

Recordemos que decimos expresiones como “ya lo veo” o “lo veo claro” para decir que uno entiende algo. Así, desde la antigüedad, la Música era considerada un arte menor comparada con las artes visuales. Se decía que la música solamente existía durante la interpretación en vivo y por lo tanto pasaba a ser un arte teatral o escénico. La música no podía tener valor monetario, a diferencia de una escultura o una pintura. La música se diluía en el aire, era invisible y, por tanto, decían que era mística.

También, la palabra “Música” viene del griego “mousike”, el arte de la Musa, donde en un principio, la melodía y la palabra eran inseparables. Un músico era el que tocaba la cítara y al mismo tiempo pronunciaba palabras. Una persona que tocaba el “aulos” o especie de oboe, no lo era. Así, la música instrumental, que no utilizaba palabras, era inútil para Platón pues dentro de la Educación le era “una de las tareas más difíciles el descubrir lo que significa un ritmo y una melodía que no tenía palabras”, es decir, la música era exclusivamente utilitaria para Platón.

Sin embargo, la música sin palabras era dejada para las danzas orgiásticas y los ritos dionisiacos. Esta crítica del “aulos” hace ver con énfasis la importancia que realmente tenía la música en el mundo griego, era también utilizada para el “placer”.

La música de arte o música con valor artístico nace cuando la música se crea por ella misma, no con una función utilitaria. En la música sin palabras interviene algo importantísimo. La música como actividad que proporciona “placer” y recordemos que el “poder del placer” es el más grande que mueve al ser humano.

En otras pláticas he explorado y expuesto las características comunes entre la Matemática y la Música y he expresado en todas mis conferencias que la Matemática es una de las “Bellas Artes”, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

La Matemática, a diferencia de la Música, no es para espectadores (ésta última tampoco es para espectadores, por ejemplo, escuchar, como música de fondo, la Sonata 1 de Rachmaninoff). Es un lenguaje que, o bien se habla, o bien no se entiende absolutamente nada. Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento. Para más sobre este tema ver [Lluis1] y [Lluis2].

3.- Denotadores y Rubato

Hay distintas maneras de jugar. A menudo se le llama “estilo” a cada tipo de juego que distingue al compositor. El compositor establece sus reglas o formas de componer o de jugar su juego.

Se puede cuantificar cuántas posibilidades hay en el juego similarmente a un juego de naipes. El intérprete decide si desea jugar tal o cual juego musical. Se puede establecer una estrategia del juego para llegar al final estéticamente satisfactorio. Se pueden cambiar o variar las reglas del juego. Se pueden establecer algoritmos simples o muy complejos que solamente usando computadora se podría jugar o componer. Algunos compositores son muy hábiles en su juego. Veremos un ejemplo más adelante.

Cada modulación se puede escribir formalmente y establecer la matemática usada por el compositor. Esto requiere de un trabajo muy difícil y exhaustivo. El Denotador de Guerino Mazzola hace esto.

El libro *The Topos of Music* es una presentación amplia de la lógica geométrica de teoría y ejecución construida a partir del marco conceptual de Denotadores y Formas que utiliza sofisticadas técnicas de la Teoría de Topos, la síntesis de geometría y lógica iniciada por Grothendieck. La teoría de formas y denotadores fue concebida como un sistema para manipular y organizar la información musical, y ha sido producto de un largo proceso de flexibilización y adaptación a la informática.

Los Denotadores se introdujeron en la informática musical en 1994 como formato de datos del software RUBATO para cubrir representaciones de todos los objetos musicales posibles. La arquitectura conceptual de RUBATO es global, ya que permite la representación de la mayoría de los objetos musicales de todo el mundo. Es decir, caben todos los juegos.

El Denotador fue producto de un proceso creativo. Se trabajó el problema de diseñar el formato de datos para un software que haría todo, desde el análisis hasta la composición y ejecución. Se crearon listas de longitud suficiente para cubrir el inicio, la duración, el volumen, el glissando, el crescendo, la voz instrumental, etc. de modo que cada objeto de este tipo viviera en un módulo grande y la mayoría de los objetos solo necesitarían una fracción de los parámetros disponibles.

Sin embargo, la idea conclusiva fue que no se pueden delegar extensiones de contenido semiótico a las máquinas. La creación musical debe estar a cargo de los humanos, que son los únicos creadores que pueden agregar significado, las máquinas no. La composición asistida por computadora no puede tener sentido (o significado) por sí sola; es el compositor humano quien tiene que cubrir el significado y el sentido de la música.

La Teoría de Categorías es el campo de la Matemática que se ha infiltrado en casi todos los dominios matemáticos y ha reformulado la mayoría de los principios básicos en un lenguaje moderno. La informática es otra disciplina que se ha beneficiado enormemente de la exposición a la Teoría de Categorías, al igual que la Teoría Matemática de la Música. Ciertamente no es exagerado afirmar que el colosal volumen “The Topos of Music” de Guerino Mazzola ha llevado la Teoría Musical a una nueva perspectiva.

El resultado más importante es que la categoría de preheces $\text{Mod}^@$ es un topos. Esto significa que permite todos los límites y colímites, así como clasificadores de subobjetos Ω .

Así, al introducir $\text{Mod}^@$, hemos proporcionado a la categoría de módulos las propiedades (que Mod no tenía) que necesitamos para moldear nuestra arquitectura de conceptos en un molde matemático. Para más sobre este tema ver [Mazzola].

4.- Fórmulas y gestos

En el 2007 Guerino Mazzola presenta un nuevo marco categórico orientado programáticamente para la descripción de las relaciones entre las actividades musicales y matemáticas. Esta relación puede ser descrita en términos de funtores adjuntos, los cuales amplían la presentación funtorial descrita en The Topos of Music. Por lo tanto, en un meta-nivel, las relaciones entre las actividades musicales y matemáticas se investigan desde un punto de vista matemático.

Lejos de ser isomorfos, la Música y la Matemática parecen tener algunas estructuras que pueden estar relacionadas mediante uno de los conceptos más poderosos de la Teoría de Categorías: el concepto de funtor adjunto. Esta construcción, propuesta por Daniel Kan en 1958 como un dispositivo técnico para el estudio de las propiedades combinatorias en la Teoría de Homotopía, pareciera ser una herramienta adecuada para enlazar tres categorías principales:

ecuaciones o fórmulas (categoría de espectroides),
esquemas de diagramas (categoría de digráficas) y
gestos (categoría de diagramas de curvas en espacios topológicos).

La categoría de digráficas, que ha sido propuesta recientemente como un concepto fundacional de la Matemática tanto para la Teoría de Conjuntos clásica y categórica, parece proporcionar una estructura musicalmente interesante para mediar entre las otras dos categorías, en el que la Música y la Matemática actúan en posiciones adjuntas.

Por medio de diagramas, la Matemática convierte gestos en fórmulas. De hecho, un diagrama es un sistema de flechas de transformación. En tal sistema uno puede seguir diferentes trayectorias o caminos partiendo y terminando en los mismos dos puntos. Estas trayectorias pueden ser vistas como movimientos gestuales. Si dos tales caminos conmutan, es decir, que producen la misma transformación compuesta, entonces tienen exactamente lo que se llama una fórmula o ecuación: dos expresiones dan el mismo resultado. Muy generalmente hablando, las fórmulas son las relaciones de conmutatividad de trayectorias o caminos gestuales. Inversamente, la actividad musical "descongela" las fórmulas y las convierte en gestos que se pueden describir como el desarrollo de fórmulas en el espacio-tiempo.

Mazzola utiliza la categoría de digráficas de curvas en espacios topológicos como el marco teórico de la Teoría Gestual. Desde un aspecto puramente teórico, "gestos de gestos" (o hipergestos), así como "gestos naturales" son canónicamente definidos, como se vé al ejemplificar el caso del gesto de un dedo de la mano de un pianista y sus generalizaciones hipergestuales. Al igual que en el caso del desarrollo de la Teoría de Categorías y la de Topos, como la realizó Mac Lane, la noción de gesto como se sugiere en el trabajo de Mazzola ofrece un buen ejemplo de la "colisión" entre los métodos algebraicos y topológicos. Recientemente Juan Sebastián Arias ha elaborado muy interesantes conceptos sobre estos temas que seguramente nos los comentará en su exposición. Más sobre este tema, ver [Mazzola].

5.- Diagrama de Peirce

Del bello y muy interesante artículo del Maestro Zalamea publicado en la Memorias del congreso de Puerto Vallarta, tomo el tetraedro. Corresponde al signo triádico de Peirce que consiste en las relaciones entre el objeto O, la representación del objeto R y la interpretación de la representación del objeto I. Ver [Zalamea].

6.- El trabajo de Nahre Sol.

Nos concentraremos en parte del diagrama de Peirce. Veremos cómo se juega un juego particular inventado por Rachmaninoff. Obviamente el compositor no dejó escritas las reglas de su juego o su algoritmo de composición. En general, los compositores no saben las reglas formales de su juego. Solamente lo juegan sin más, por intuición. Hay otros que sí las conocen y no lo divulgan. Es hasta que musicólogos muy talentosos descubren su juego o algoritmo. Esto sucedió, por ejemplo, con la música de Bartok y la utilización de las sucesiones de Fibonacci. Al final veremos un vídeo de la talentosa Nahre Sol [Sol].

Lo que veremos en el vídeo se puede trabajar con RUBATO. Veamos ahora un caso muy interesante con la siguiente obra.

7.- Presentación de los temas de la Sonata 1 de Rachmaninoff.

La Sonata No. 1 Op. 28 de Rachmaninoff (1873-1943) en re menor es una obra monumental compuesta a finales de 1906 y principios de 1907 durante una estancia del compositor en Dresden cuando este tenía 33 años. Finalizada el 14 de mayo de 1907, es una de las más ambiciosas composiciones de Rachmaninoff.

En una carta a Morozov, Rachmaninoff le escribe: “La sonata es ciertamente salvaje e interminable. Creo que dura cerca de 45 minutos. Fui llevado a esta longitud debido a su idea guía. Esto es, tres tipos contrastantes de un trabajo literario. Por supuesto que ningún programa será indicado, aunque creo que la sonata sería más clara si se revela el programa. Nadie va a tocar esta composición, es muy difícil y larga... . En un principio quise hacer de ella una sinfonía, pero esto parecía imposible debido al puro estilo pianístico en el cual está escrita.” Cuando escribe “programa” se refiere al guion o argumento.

Es una obra maestra magníficamente compuesta para el piano, impactante, brillante y extensa (cerca de cuarenta minutos de duración, pues el compositor le hizo algunos recortes unos días antes de llevarla a publicar). Es la más polifónica de sus obras para piano. No es una obra popular debido a su extraordinaria dificultad técnica e interpretativa, al requerimiento de una profunda concentración por parte del oyente y del intérprete pues posee una enorme complejidad. Muy rara vez se toca esta sonata en un concierto. La Sonata No. 29, Op. 106 “Hammerklavier” es la más larga que compuso Beethoven la cual tiene 46 páginas y alrededor de 40,000 notas mientras que la Sonata No. 1 Op. 28 de Rachmaninoff tiene 57 páginas y alrededor de 60,000 notas. En México, hice su estreno en 1992 y en 1993 la volví a tocar en el Homenaje a Rachmaninoff que organicé con motivo del cincuentenario de su fallecimiento.

8.- Ligadura con la Poesía.

Ahora ligaremos esta obra con una de las más importantes obras de la literatura de todo el mundo. La sonata fue estrenada por Konstantine Igumnov el 17 de octubre de 1908 en Moscú. Esta fue la primera vez que el compositor no estrenaba una de sus obras. Después del estreno, Rachmaninoff le reveló a Igumnov que los tres movimientos estaban inspirados en el Fausto de Goethe incluyendo a los personajes Fausto, Gretchen y Mefistófeles. (Recuerdo las palabras del Maestro Zalamea acerca de Grothendieck y la Poesía)

Rachmaninoff basó cada movimiento en el carácter de cada personaje. El primer movimiento, con secciones corales y poderosos trémolos de carácter orquestal, es Fausto. El movimiento lento, de fina sensibilidad lírica, es exquisito con el tema de Gretchen explotado al máximo, con unos trinos a la manera de Scriabin. Mefistófeles fundamentalmente aparece en el tormentoso tercer movimiento, el cual incluye momentos

paradisíacos e infernales. Los tres personajes aparecen en cada movimiento. Rachmaninoff nunca reveló los detalles literarios del plan de la obra. Quería que se apreciara por su aspecto puramente musical y yo coincidí plenamente con él. Sin embargo, al igual que él expresó, yo coincidí con que quizás si se explica el argumento o guion, la sonata se entendería mejor.

No es una casualidad que esté compuesta en su tonalidad favorita, re menor. Rachmaninoff escogió esta tonalidad, la cual expresa estados macabros y sombríos para sus obras más importantes, entre ellas la presente Sonata, el Tercer Concierto, la Primera Sinfonía, las secciones principales de su ópera Aleko y las Variaciones Corelli.

Veamos estos detalles en el piano, es decir, veamos la trayectoria Partitura→Intérprete→Sonido del diagrama de Peirce, analizando los motivos musicales, temas, etc. de esta gran obra. Así tenemos tensiones entre la Poesía, la Música y la Matemática. Ver [Lluis3].

Referencias

[Lluis1] http://imch.org.mx/03_archivos/MatyMusMusyMatAgo2011cc.pdf

[Lluis2] http://imch.org.mx/03_archivos/IMCH2015aArticLluispagIMCH.pdf

[Lluis3] https://youtu.be/amZMmDDE_Lg

[Mazzola] Mazzola, G. "The Topos of Music". Second Edition. Springer.

[Sol] <https://www.youtube.com/watch?v=imGbhF2AEPw>

[Zalamea] Zalamea, F. "Mazzola, Galois, Peirce, Riemann and Merleau-Ponty: A Triadic, Spacial Framework for Gesture Theory". The Musical-Mathematical Mind. Springer.

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
www.emiliolluis.org
emiliolluis@ciencias.unam.mx