

**Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades**

**Derivación de series dodecafónicas
mediante el uso de producto de
cuaterniones y combinatoria.**

**Raúl Novoa Castilla
Emilio Lluís-Puebla**

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 9 (2026)



Derivación de series dodecafónicas mediante el uso de producto de cuaterniones y combinatoria.

Derivation of dodecaphonic series using quaternion product and combinatorics.

Raúl Novoa Castilla^a y Emilio Lluís-Puebla^b

^aMatemático independiente, México.

^bDepartamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Resumen

En la técnica de composición musical conocida como Serialismo se trabaja con series de doce sonidos, que son permutaciones de la escala cromática. Además de aquellas contenidas en las matrices aditiva y multiplicativa, existen algunas técnicas para obtener variantes con distintas estructuras interválicas; una de ellas es la derivación de series a partir de hexacordes, tetracordes o tricordes discretos, recuperados de la serie original o tema. Se propone el uso de combinatoria aunada al producto de cuaterniones para la obtención de series derivadas a partir de tetracordes discretos de las series que dan origen a ambas matrices, es decir, la serie original S_0 , y sus variantes generadas con la operación producto.

Palabras Clave: Producto de cuaterniones · Combinatoria · Serialismo · Desarrollo musical

Abstract

The musical composition technique known as Serialism works with twelve-tone series, which are permutations of the chromatic scale. In addition to those contained in the additive and multiplicative matrices, there are techniques for obtaining variants with different intervallic structures; one of these is the derivation of series from discrete hexachords, tetrachords, or trichords, recovered from the original series or theme. The use of combinatorics combined with the quaternion product is proposed to obtain series derived from discrete tetrachords of the series that give rise to both matrices, that is, the original series S_0 , and its variants generated by the product operation.

Keywords: *Quaternion product · Combinatorics · Serialism · Musical variation*

Antecedentes

La Segunda Escuela de Viena se consagró como precursora del Dodecafonismo de Arnold Schönberg y, posteriormente, del Serialismo de Anton Webern, aunque les preceden los trabajos de Josef Matthias Hauer y Herbert Eimert (Covach 2002).

A principios de la segunda década del siglo XX, Arnold Schönberg publicó su *Suite para piano Op. 25*, sin embargo, ya desde el quinto movimiento de sus *5 piezas para piano Op. 23*, el *Vals*, aplicó sistemáticamente su ‘método de composición con doce tonos’, el cual mostró ser relevante para ciertos problemas de la composición atonal, limitándose a las permutaciones de la escala cromática, sin que ningún otro atributo definiera la *serie dodecafónica* (Perle 1991).

El método de Schönberg estaba sustentado en cuatro axiomas:

1. Una *serie* está constituida por los doce sonidos de la escala cromática.
2. Ningún sonido puede aparecer más de una vez en la *serie*.
3. La *serie* se puede exponer en cualquiera de sus direcciones melódicas: directa, retrógrada, invertida y retrógrada-invertida.
4. La *serie*, en sus cuatro direcciones, puede ser utilizada a partir de cualquiera de los sonidos.

Con el tiempo surgieron propuestas e innovaciones, tanto en la técnica de composición como en el análisis, pues hacia la mitad del siglo pasado, varios compositores aportaron procedimientos personales de su manera de trabajar con el Serialismo, al tiempo que analizaban las obras de sus predecesores. Se desarrollaron varias opciones para la derivación de series, y la serialización no se limitó a las alturas, sino que se extendió hacia otros elementos musicales, como la duración o la intensidad de esos sonidos, por ejemplo, llevando al *serialismo integral* (Babbitt 1960) (Boulez 1990), aunque no todos los compositores se sintieron cómodos con el orden total de la música, así como con el uso de formas tradicionales.

Algunos otros nombres importantes en el desarrollo del Serialismo son: Alban Berg, Pierre Boulez, Karlheinz Stockhausen, Ernst Krenek, George Perle, Milton Babbitt, David Lewin, por mencionar sólo algunos.

Tras el serialismo estricto, surgió la necesidad de analizar las relaciones entre grupos de notas. Allen Forte aplicó conceptos de la *teoría de conjuntos* para clasificar todas las combinaciones posibles de tonos (Forte 1973). Milton Babbitt la usó para explicar las relaciones estructurales en la música post tonal (Babbitt 1961), aunque también usó *teoría de grupos* al considerar la aplicación de los operadores de transposición y dirección melódica a una serie dodecafónica (Babbitt 2003).

Más adelante, también comenzaron a aparecer avances en la modelación matemática de esta técnica, en particular, y de la teoría musical, en general, para encaminarse en este siglo hacia una Teoría Matemática de la Música.

Mientras los serialistas buscaban un control determinista, Iannis Xenakis criticó el Serialismo por ser demasiado simple matemáticamente; introdujo el uso de *cálculo de probabilidades*, para gestionar grandes masas de sonidos (nubes de puntos), y *teoría de juegos y distribuciones de Gauss*, para determinar la densidad y el comportamiento de la orquesta (Xenakis 1992).

Guerino Mazzola fue más allá, utilizando la *geometría algebraica* para entender cómo las estructuras musicales se transforman y se relacionan entre sí en un espacio multidimensional. En *The Topos of Music*, propone que la música puede ser entendida como un espacio con propiedades geométricas, lo que permite analizar no sólo las notas, sino también el ritmo, el timbre y la interpretación, bajo un mismo marco formal (Mazzola 2002). Es, en esencia, la formalización definitiva de lo que los serialistas integrales soñaban en la década de 1950.

Matrices seriales

La primera fuente de material que tiene el compositor serial consiste en dos matrices de series, la *matriz aditiva* y la *matriz multiplicativa*; la primera de ellas, que emplea la operación *suma* (+), es ampliamente conocida, no así la segunda, que hace uso de la operación *producto* (•). (Novoa & Lluís-Puebla 2026)

Se muestran a continuación ambas matrices para $S_0 = \{D,C,B,E^b,B^b,A,E,F,G^b,A^b,G,D^b\} = \{2,0,11,3,10,9,4,5,6,8,7,1\}$.

	$I_4(S_0)$	$I_2(S_0)$	$I_1(S_0)$	$I_3(S_0)$	$I_0(S_0)$	$I_{11}(S_0)$	$I_6(S_0)$	$I_7(S_0)$	$I_8(S_0)$	$I_{10}(S_0)$	$I_9(S_0)$	$I_5(S_0)$	R_{S_0}
S_0	2	0	11	3	10	9	4	5	6	8	7	1	R_{S_0}
$T_2(S_0)$	4	2	1	5	0	11	6	7	8	10	9	3	$RT_2(S_0)$
$T_3(S_0)$	5	3	2	6	1	0	7	8	9	11	10	4	$RT_3(S_0)$
$T_{11}(S_0)$	1	11	10	2	9	8	3	4	5	7	6	0	$RT_{11}(S_0)$
$T_4(S_0)$	6	4	3	7	2	1	8	9	10	0	11	5	$RT_4(S_0)$
$T_5(S_0)$	7	5	4	8	3	2	9	10	11	1	0	6	$RT_5(S_0)$
$T_{10}(S_0)$	0	10	9	1	8	7	2	3	4	6	5	11	$RT_{10}(S_0)$
$T_6(S_0)$	11	9	8	0	7	6	1	2	3	5	4	10	$RT_6(S_0)$
$T_8(S_0)$	10	8	7	11	6	5	0	1	2	4	3	9	$RT_8(S_0)$
$T_9(S_0)$	8	6	5	9	4	3	10	11	0	2	1	7	$RT_9(S_0)$
$T_7(S_0)$	9	7	6	10	5	4	11	0	1	3	2	8	$RT_7(S_0)$
$T_1(S_0)$	3	1	0	4	11	10	5	6	7	9	8	2	$RT_1(S_0)$
	$R_{T_4}(S_0)$	$R_{T_2}(S_0)$	$R_{T_1}(S_0)$	$R_{T_3}(S_0)$	$R_{T_0}(S_0)$	$R_{T_{11}}(S_0)$	$R_{T_6}(S_0)$	$R_{T_7}(S_0)$	$R_{T_8}(S_0)$	$R_{T_{10}}(S_0)$	$R_{T_9}(S_0)$	$R_{T_5}(S_0)$	

Tabla 1. Matriz aditiva de series para S_0 .

	$I_4(P_5(S_0))$	$I_2(P_5(S_0))$	$I_1(P_5(S_0))$	$I_3(P_5(S_0))$	$I_0(P_5(S_0))$	$I_{11}(P_5(S_0))$	$I_6(P_5(S_0))$	$I_7(P_5(S_0))$	$I_8(P_5(S_0))$	$I_{10}(P_5(S_0))$	$I_9(P_5(S_0))$	$I_5(P_5(S_0))$	$R_{T_4}(P_5(S_0))$
$T_4(P_5(S_0))$	2	4	11	7	6	1	0	5	10	8	3	9	$RT_4(P_5(S_0))$
$T_2(P_5(S_0))$	0	2	9	5	4	11	10	3	8	6	1	7	$RT_2(P_5(S_0))$
$T_7(P_5(S_0))$	5	7	2	10	9	4	3	8	1	11	6	0	$RT_7(P_5(S_0))$
$T_{11}(P_5(S_0))$	9	11	6	2	1	8	7	0	5	3	10	4	$RT_{11}(P_5(S_0))$
$T_0(P_5(S_0))$	10	0	7	3	2	9	8	1	6	4	11	5	$RT_0(P_5(S_0))$
$T_5(P_5(S_0))$	3	5	0	8	7	2	1	6	11	9	4	10	$RT_5(P_5(S_0))$
$T_6(P_5(S_0))$	4	6	1	9	8	3	2	7	0	10	5	11	$RT_6(P_5(S_0))$
$T_1(P_5(S_0))$	11	1	8	4	3	10	9	2	7	5	0	6	$RT_1(P_5(S_0))$
$T_8(P_5(S_0))$	6	8	3	11	10	5	4	9	2	0	7	1	$RT_8(P_5(S_0))$
$T_{10}(P_5(S_0))$	8	10	5	1	0	7	6	11	4	2	9	3	$RT_{10}(P_5(S_0))$
$T_3(P_5(S_0))$	1	3	10	6	5	0	11	4	9	7	2	0	$RT_3(P_5(S_0))$
$T_9(P_5(S_0))$	7	9	4	0	11	6	5	10	3	1	8	2	$RT_9(P_5(S_0))$
	$R_{T_4}(P_5(S_0))$	$R_{T_2}(P_5(S_0))$	$R_{T_7}(P_5(S_0))$	$R_{T_{11}}(P_5(S_0))$	$R_{T_0}(P_5(S_0))$	$R_{T_5}(P_5(S_0))$	$R_{T_6}(P_5(S_0))$	$R_{T_1}(P_5(S_0))$	$R_{T_8}(P_5(S_0))$	$R_{T_{10}}(P_5(S_0))$	$R_{T_3}(P_5(S_0))$	$R_{T_9}(P_5(S_0))$	

Tabla 2. Matriz multiplicativa de series para $T_4(P_5(S_0))$.

Sin embargo, cada matriz de series consiste en las transposiciones de dos series diferentes: la primera fila y la primera columna, independientemente de si el movimiento es directo (D, I) o retrógrado (R, RI).

	$I_4(S_0)$	$I_2(S_0)$	$I_1(S_0)$	$I_5(S_0)$	$I_0(S_0)$	$I_{11}(S_0)$	$I_6(S_0)$	$I_7(S_0)$	$I_8(S_0)$	$I_{10}(S_0)$	$I_9(S_0)$	$I_3(S_0)$
S_0	2	0	11	3	10	9	4	5	6	8	7	1
$T_2(S_0)$	4	2	1	5	0	11	6	7	8	10	9	3
$T_3(S_0)$	5	3	2	6	1	0	7	8	9	11	10	4
$T_{11}(S_0)$	1	11	10	2	9	8	3	4	5	7	6	0
$T_4(S_0)$	6	4	3	7	2	1	8	9	10	0	11	5
$T_5(S_0)$	7	5	4	8	3	2	9	10	11	1	0	6
$T_{10}(S_0)$	0	10	9	1	8	7	2	3	4	6	5	11
$T_9(S_0)$	11	9	8	0	7	6	1	2	3	5	4	10
$T_8(S_0)$	10	8	7	11	6	5	0	1	2	4	3	9
$T_6(S_0)$	8	6	5	9	4	3	10	11	0	2	1	7
$T_7(S_0)$	9	7	6	10	5	4	11	0	1	3	2	8
$T_1(S_0)$	3	1	0	4	11	10	5	6	7	9	8	2

Gráfico 1. Direcciones melódicas en la matriz aditiva de series: D(R), I(RI).

Resulta evidente que los renglones y las columnas de las matrices de series están replicando las mismas relaciones interválicas, por lo que se requiere un procedimiento para generar material con relaciones interválicas diferentes, que no se encuentren en ninguna de las matrices. Hay varias opciones, y una de ellas es la *derivación de series*.

Derivación de series

Es posible generar una serie dodecafónica a partir de tres, cuatro o seis sonidos que son recuperados de la serie original, aplicando después las operaciones de transposición (T_n), inversión, retrogradación y retrogradación-invertida (I, R, RI), para completar la nueva serie, a la cual se le conoce como *serie derivada*. Schönberg usaba un hexacorde y completaba la serie con alguna transformación y transposición del mismo. Anton Webern tomaba un tricorde y le aplicaba las operaciones mencionadas, para obtener una nueva serie de doce sonidos yuxtaponiendo los fragmentos obtenidos, como en el Op. 24, que realiza la derivación a partir del tricorde $\{C, D^b, E\} = \{0, 1, 4\}$. (Babbitt 1961) (Straus 1973) (Perle 1991)

A continuación se muestran los hexacordes, tetracordes y tricordes discretos de la serie original que se utilizó en la Tabla 1.

$$S_0 = \{D, C, B, E^b, B^b, A, E, F, G^b, A^b, G, D^b\} = \{D, C, B, E^b, B^b, A\} \cup \{E, F, G^b, A^b, G, D^b\} = \{D, C, B, E^b\} \cup \{B^b, A, E, F\} \cup \{G^b, A^b, G, D^b\} = \{D, C, B\} \cup \{E^b, B^b, A\} \cup \{E, F, G^b\} \cup \{A^b, G, D^b\}$$

Que traducido al modelo matemático se tendría

$$S_0 = \{2, 0, 11, 3, 10, 9, 4, 5, 6, 8, 7, 1\} = \{2, 0, 11, 3, 10, 9\} \cup \{4, 5, 6, 8, 7, 1\} = \{2, 0, 11, 3\} \cup \{10, 9, 4, 5\} \cup \{6, 8, 7, 1\} = \{2, 0, 11\} \cup \{3, 10, 9\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{8, 7, 1\}$$

Si se toma el primer tricorde, por ejemplo, y se aplican las operaciones mencionadas, se puede obtener una serie derivada, como se muestra a continuación.



Gráfico 2. Serie derivada a partir del tricorde {D,C,B}.

En donde: $\{D,C,B\} = \{2,0,11\}$ es el tricorde recuperado de S_0 ;

$$\{D^b,E^b,E\} = \{1,3,4\} = T_3(I_0(2,0,11)) = I_3(2,0,11);$$

$$\{B^b,A,G\} = \{10,9,7\} = T_9(R(I_0(2,0,11)))$$

$$\{F,G^b,A^b\} = \{5,6,8\} = T_6(R(2,0,11));$$

En este trabajo se pondrá una manera alternativa para hacer derivación de series, utilizando una herramienta matemática, para obtener tetracordes por medio del producto de cuaterniones y después, por un proceso de selección y eliminación, seguido de un trabajo de Combinatoria, obtener nuevas series dodecafónicas.

Definiciones matemáticas

Los antecedentes de la relación entre música y matemática ya se presentaron con detalle (Novoa & Lluís-Puebla 2026), por lo que únicamente se dará un resumen de las expresiones que se puedan requerir en esta ocasión.

La *escala cromática*, que proviene del temperamento igual de doce sonidos, se puede modelar por medio de \mathbb{Z}_{12} , que es el conjunto de los primeros 12 números enteros no negativos, es decir $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

Cada elemento del conjunto equivale a una nota de la escala, empezando por C, y para efectos de análisis, se activan las equivalencias *de enarmonía* y *de octava*, es decir, no importa el nombre que se le asigne a un sonido, sino su posición dentro del conjunto –que en este caso es la escala–, y no importa su índice acústico, ya que cada elemento representa en realidad una clase de equivalencia, por lo que se trabaja en todo momento con *congruencia módulo doce*.

De ahí se requerirán algunas definiciones de Teoría de Grupos, y para hacer uso de la operación producto se puede recurrir a la Teoría de Anillos o, por lo menos, a la definición de un *grupo con operadores*.

Definición 1. Un *grupo* es una dupla $(G,+)$ donde G es un conjunto no vacío y $+: G \times G \rightarrow G$ es una *operación binaria* tal que $(u,v) \rightarrow +(u,v)$; que se acostumbra escribir $+(u,v) = u + v$, la cual debe cumplir con ciertas propiedades:

- i) *Asociatividad* de la operación: $+(+(u,v),w) = +(u,+(v,w))$ es decir, $(u + v) + w = u + (v + w)$

- ii) Existencia del *elemento neutro* o identidad: $+(u, e) = u + e = e + u = u$
- iii) Existencia del *elemento inverso*: para todo $u \in G$, existe $(-u) \in G$ tal que $+(u, -u) = u + (-u) = e$

Se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano* si además satisface...

- iv) $+(u, v) = +(v, u)$, es decir, $u + v = v + u$

Para relacionar dos grupos es necesario definir una función que preserve sus estructuras.

Definición 2. Sean (G, \diamond) y (G', \star) dos grupos. Un *homomorfismo de grupos* es una función $f : G \rightarrow G'$ tal que $f(u \diamond v) = f(u) \star f(v)$.

Se requerirán, además, las definiciones de *acción* y de *grupo con operadores*.

Definición 3. Sean Ω y G dos conjuntos. Una *acción* de Ω en G es una función $f : \Omega \times G \rightarrow G$.

Definición 4. Sea Ω un conjunto. Un grupo (G, \circ) junto con una acción de Ω en (G, \circ) se llama *grupo con operadores* en Ω

$$\begin{aligned} \circ : \Omega \times G &\rightarrow G \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \circ x = x^\alpha \end{aligned}$$

y además cumple con la propiedad distributiva con respecto a la *operación binaria* de (G, \circ) .

En un grupo G con operadores en Ω , cada elemento de Ω –llamado *operador*– define un *endomorfismo* del grupo G –es decir, un homomorfismo de $G \rightarrow G$ –. Considérese $\Omega = \mathbb{Z}$ y para $x \in G, n \in \mathbb{Z}$, se define

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{Z} \times G &\rightarrow G \\ (n, x) &\mapsto n \circ x = x^n \end{aligned}$$

Si G es abeliano se tiene que $n(xy) = (xy)^n = x^n y^n = (nx)(ny)$. Luego, todo grupo abeliano G puede verse como un grupo con operadores en \mathbb{Z} (Agustín-Aquino et al. 2009).

Operadores musicales

También serán necesarios *operadores musicales*, que se definen a continuación. Debido a que la palabra *operador* es polisémica y puede ser utilizada en diversas disciplinas, cuando se utilice ese término se deberá entender el contexto para saber si se refiere a un operador matemático o a uno musical.

Se considera $X \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ donde $X = \{ \{x_1, x_2, \dots, x_i\} \mid x_1, x_2, \dots, x_i \in \mathbb{Z}_{12}, i \in \mathbb{N} \}$, ya que X puede ser cualquier estructura musical.

Definición 5. Operador de Transposición (T_n).

Una *transposición* es una función $T_n : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ dada por: $T_n(x) = x + n$, de manera que $T_n(X) = \{x_1 + n, x_2 + n, \dots, x_i + n\}$ donde $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Dado que se

trabaja con la equivalencia de octava, porque las operaciones son *módulo 12*, en general, $T_{-n} = T_{12-n}$ (Agustín-Aquino et al. 2009).

Definición 6. Operador de Inversión (I_n).

Una *inversión interválica* –que respeta tipo y cualidad del intervalo– es una función $I_n : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ dada por $I_n(X) = \{-x_1 + n, -x_2 + n, \dots, -x_i + n\}$ en donde $n \in \mathbb{Z}_{12}$, de manera que $I_n(X) = \{I_0(X), I_1(X), I_2(X), \dots, I_{12}(X)\}$ (Agustín-Aquino et al. 2009).

Definición 7. Eje de la inversión (e_{I_n}).

$I_0(X)$ es la inversión con respecto a 0 como eje de la misma, y las demás inversiones resultan ser transposiciones de $I_0(X)$, de manera que $T_n \circ I_0 = I_n \pmod{12}$; cada una de ellas resultará ser la inversión con respecto a algún eje en particular, y esos sonidos, si están presentes, permanecerán invariables. Si se desea encontrar el operador de inversión (I_n) adecuado para que un sonido en particular (x) funcione como eje de inversión (e_{I_n}), hay que calcular el valor de n ; para $e_{I_n} = x$, $n = 2x \pmod{12}$ (Novoa 2022).

Definición 8. Serie dodecafónica (S_i).

Sea \mathcal{P}_{12} el conjunto de todas las permutaciones de la escala cromática, que también son las permutaciones de \mathbb{Z}_{12} , y su cardinalidad, es decir, el número de todas las posibles series dodecafónicas, es $|\mathcal{P}_{12}| = 12! = 479'001,600$. Una *serie dodecafónica* S_i es una permutación en \mathcal{P}_{12} , o sea, $S_i \in \mathcal{P}_{12}$,

Definición 9. Direcciones melódicas.

Es posible definir las cuatro direcciones melódicas de una *serie* como las funciones *inversión* (I_s), *retrogradación* (R) y *retrogradación con inversión* (RI), siendo el movimiento directo la *identidad* ($\text{id}_{\mathcal{F}(n)}$), de la siguiente manera (Agustín-Aquino et al. 2009):

$$I_s : \mathcal{F}(n) \mapsto \mathcal{F}(n) \\ \{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n$$

$$R : \mathcal{F}(n) \mapsto \mathcal{F}(n) \\ \{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n$$

$$RI_s : \mathcal{F}(n) \mapsto \mathcal{F}(n) \\ \{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n$$

el conjunto $\mathcal{ST}_s = \{I_s, R, RI_s, \text{id}_{\mathcal{F}(n)}\}$ es un grupo bajo la operación binaria \circ .

Es importante observar que el subíndice de la función de inversión (I_s) no es igual que el del operador (I_n), pues en aquel caso se refería al número de semitonos que se transponía la inversión I_0 , mientras que, en este caso, se refiere directamente al sonido que funciona como el eje de la inversión interváltica.

Definición 10. Operador de transformación por multiplicación P_n .

Se define el operador $P_n = \{n \cdot x \pmod{12} \mid n, x \in \mathbb{Z}_{12}\}$, siendo los operadores P_1 , P_5 , P_7 y P_{11} los únicos que conservan la estructura de las series dodecafónicas.

P_1 es la *identidad* –conserva a S_0 sin alteraciones–, P_{11} es el *operador de inversión* con respecto al elemento 0, es decir, $P_{11} = I_0(S_0)$, y $P_7 = I_0(P_5)$.

Producto de cuaterniones

El producto de cuaterniones fue descubierto por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton en 1843, cuando trataba de extender los números complejos para describir rotaciones en el espacio, y terminó con un sistema de cuatro dimensiones: una parte real y un vector con tres partes imaginarias (Conway & Smith 2003).

Un cuaternión se representa como $q = a + bi + cj + dk$, en donde a, b, c, d son números reales, mientras que i, j, k son las unidades de una base imaginaria tridimensional. Se tienen las siguientes identidades: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, y el producto no es conmutativo: $ij = k$ pero $ji = -k$.

El producto entre dos cuaterniones, que da como resultado otro cuaternión, se define de la siguiente manera

$$(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)(\beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k) = (\gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k)$$

Para obtener los coeficientes γ se realizan las siguientes operaciones

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0 - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3$$

$$\gamma_1 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2$$

$$\gamma_2 = \alpha_0 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_0 + \alpha_3 \beta_1$$

$$\gamma_3 = \alpha_0 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_0$$

En este caso, los coeficientes reales de cada cuaternión son los elementos de los tetracordes discretos recuperados de alguna serie, y los coeficientes del resultado son los elementos de un *tetracorde derivado*.

A continuación se divide S_0 en tetracordes discretos, y se presentan con ambos cifrados, aunque nos interesa el matemático:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{D, C, B, E^b\} \cup \{B^b, A, E, F\} \cup \{G^b, A^b, G, D^b\} \\ &= \{2, 0, 11, 3\} \cup \{10, 9, 4, 5\} \cup \{6, 8, 7, 1\} \end{aligned}$$

Después se obtiene el producto entre dos tetracordes, por ejemplo (10, 9, 4, 5) (6, 8, 7, 1), sin olvidar que se trabaja con congruencia módulo 12.

$$(10, 9, 4, 5)(6, 8, 7, 1) = (3, 7, 5, 11)$$

$$\gamma_0 = 10 \cdot 6 - 9 \cdot 8 - 4 \cdot 7 - 5 \cdot 1 = 3$$

$$\gamma_1 = 10 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 7 = 7$$

$$\gamma_2 = 10 \cdot 7 - 9 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 5$$

$$\gamma_3 = 10 \cdot 1 + 9 \cdot 7 - 4 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 11$$

Generación de tetracordes

Se trabaja con las cuatro series que dan origen a ambas matrices, y que se pueden obtener a partir de S_0 con los operadores de producto P_1 , P_{11} , P_5 y P_7 . Aquí se les llamará *series generadoras*, y se presentan con cifrado matemático.

$$P_1(S_0) = \{2, 0, 11, 3, 10, 9, 4, 5, 6, 8, 7, 1\}$$

$$P_{11}(S_0) = \{2, 4, 5, 1, 6, 7, 0, 11, 10, 8, 9, 3\} = I_0(S_0)$$

$$P_5(S_0) = \{10, 0, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 6, 4, 11, 5\}$$

$$P_7(S_0) = \{2, 0, 5, 9, 10, 3, 4, 11, 6, 8, 1, 7\} = I_0(P_5(S_0))$$

Hay que recordar que, para que se puedan apreciar mejor las variantes entre las dos matrices, conviene hacer un ajuste en la multiplicativa, para tener la misma diagonal principal en ambas (Novoa & Lluís-Puebla 2026). En este caso, como el primer elemento debe ser $\{2\}$, únicamente hay que ajustar una serie, sumando 4 a $P_5(S_0)$.

$$P_1(S_0) = \{2, 0, 11, 3, 10, 9, 4, 5, 6, 8, 7, 1\}$$

$$P_{11}(S_0) = \{2, 4, 5, 1, 6, 7, 0, 11, 10, 8, 9, 3\}$$

$$T_4(P_5(S_0)) = \{2, 4, 11, 7, 6, 1, 0, 5, 10, 8, 3, 9\}$$

$$P_7(S_0) = \{2, 0, 5, 9, 10, 3, 4, 11, 6, 8, 1, 7\}$$

Ahora se obtienen los productos para los tetracordes de estas series.

Se comienza con los tetracordes de una misma serie, recordando que el producto no es conmutativo, por lo que conviene realizarlo en ambas direcciones.

		A1				A2				A3			
S_0 :		2	0	11	3	10	9	4	5	6	8	7	1
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
A1(A2) =	9	1	1	1	A2(A1) =	9	11	7	7				
A1(A3) =	4	6	8	4	A3(A1) =	4	2	8	0				
A2(A3) =	3	7	5	11	A3(A2) =	3	9	3	9				
		B1				B2				B3			
$P_{11}(S_0)$		2	4	5	1	6	7	0	11	10	8	9	3
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
B1(B2) =	9	9	5	5	B2(B1) =	9	7	7	3				
B1(B3) =	0	2	4	0	B3(B1) =	0	2	0	8				
B2(B3) =	7	7	1	11	B3(B2) =	7	1	11	5				

Tabla 3a. Producto de tetracordes para las series S_0 y $P_{11}(S_0)$.

		C1				C2				C3			
$T_4(P_5(S_0))$		2	4	11	7	6	1	0	5	10	8	3	9
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
C1(C2) =	9	9	5	5									
C1(C3) =	0	2	4	0									
C2(C3) =	7	7	1	11									
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
C2(C1) =	9	7	7	3									
C3(C1) =	0	2	0	8									
C3(C2) =	7	1	11	5									
		D1				D2				D3			
$P_7(S_0)$		2	0	5	9	10	3	4	11	6	8	1	7
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
D1(D2) =	9	1	1	1									
D1(D3) =	4	6	8	4									
D2(D3) =	3	7	5	11									
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3									
D2(D1) =	9	11	7	7									
D3(D1) =	4	2	8	0									
D3(D2) =	3	9	3	9									

Tabla 3b. Producto de tetracordes para las series $T_4(P_5(S_0))$ y $P_7(S_0)$.

Como se puede apreciar, no en todos los casos se conserva la estructura de tetracorde, por lo que únicamente nos sirven aquellos en los que sí suceda. También resulta evidente que los tetracordes que producen las series de la matriz multiplicativa repiten los obtenidos con las de la matriz aditiva, aunque con otros factores. Por lo tanto, únicamente se obtuvieron 3 tetracordes derivados, y ninguna de esas secuencias se van a encontrar en ninguna de las matrices, en cualquier dirección.

Después hay que obtener el producto de un tetracorde con todos los de las otras series.

$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
A1(B1) =	6	4	8	0	A1(C1) =	6	6	8	0	A1(D1) =	6	0	8	0
A1(B2) =	3	3	3	11	A1(C2) =	9	7	9	5	A1(D2) =	3	7	7	7
A1(B3) =	8	10	8	8	A1(C3) =	8	4	8	8	A1(D3) =	4	6	8	4
A2(B1) =	7	1	9	1	A2(C1) =	1	11	3	7	A2(D1) =	3	5	1	1
A2(B2) =	2	0	8	4	A2(C2) =	2	8	8	4	A2(D2) =	2	0	8	4
A2(B3) =	1	5	11	9	A2(C3) =	7	11	5	3	A2(D3) =	9	1	11	5
A3(B1) =	4	6	4	8	A3(C1) =	4	8	4	8	A3(D1) =	4	2	8	0
A3(B2) =	5	11	9	11	A3(C2) =	11	7	3	5	A3(D2) =	9	3	9	3
A3(B3) =	2	8	0	8	A3(C3) =	2	10	0	8	A3(D3) =	6	0	0	0
$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	$\alpha(\beta)$	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
B1(A1) =	6	0	8	4	B1(C1) =	10	4	8	4	B1(D1) =	6	0	8	4
B1(A2) =	7	7	11	3	B1(C2) =	3	3	11	11	B1(D2) =	1	1	5	9
B1(A3) =	4	2	0	8	B1(C3) =	0	2	4	0	B1(D3) =	4	2	0	8
B2(A1) =	3	1	9	9	B2(C1) =	3	1	1	9	B2(D1) =	9	7	3	3
B2(A2) =	2	8	4	0	B2(C2) =	10	0	0	0	B2(D2) =	2	8	4	0
B2(A3) =	5	1	3	1	B2(C3) =	1	1	7	5	B2(D3) =	11	7	9	7
B3(A1) =	8	10	8	4	B3(C1) =	0	2	0	8	B3(D1) =	8	10	8	4
B3(A2) =	1	11	9	7	B3(C2) =	1	7	5	11	B3(D2) =	7	5	3	1
B3(A3) =	2	8	8	0	B3(C3) =	6	4	0	0	B3(D3) =	2	8	8	0

Tabla 4. Producto de tetracordes entre las series generadoras.

De la misma manera que ocurrió con los tetracordes recuperados de las series generadoras, o tetracordes generadores, al hacer el producto en la otra dirección, se obtendrán los mismos tetracordes, aunque no con los mismos factores. Sin embargo, también se encontraron algunas duplicidades entre los productos presentados en la Tabla 4:

$$A_2(D_2) = A_2(B_2), B_1(D_1) = B_1(A_1), B_1(D_3) = B_1(A_3) \text{ y } B_2(D_2) = B_2(A_2).$$

En esta ocasión se obtuvieron 15 tetracordes derivados.

Derivación por Combinatoria

En este momento se requieren algunos conceptos básicos de *Combinatoria*.

Un conjunto tiene m elementos, y se toman n de ellos para obtener un subconjunto; la manera de seleccionarlos puede cumplir con ciertas condiciones, dando como resultado *permutaciones*, *combinaciones* o *variaciones*. En todos los casos, no nos interesan las opciones con repetición de elementos.

Una *permutación* es un cambio en el orden de los elementos de un conjunto. Aquí $n = m$ y el orden sí importa. El cálculo de todas las posibles permutaciones de este tipo, se obtiene con la fórmula

$$P_n = n!$$

Si se toma un tetracorde, por ejemplo $\{2, 4, 0, 8\}$, una permutación sería $\{2, 4, 8, 0\}$ ó también $\{4, 0, 8, 2\}$. En total habría 24 permutaciones, ya que $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Una *variación* (sin repetición) es un subconjunto de n elementos tomados de un conjunto con m elementos, en el que sí importa el orden. Aquí $n \leq m$ y $AB \neq BA$. El cálculo de todas las posibles variaciones de este tipo, se obtiene con la fórmula

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

¿Cuántas escalas heptáfonas se pueden formar con la escala cromática? Vistos como modos paralelos, con la tónica fija, quedan 11 elementos tomados de 6 en 6:

$$V_{11}^6 = \frac{11!}{(11-6)!} = 462$$

Una *combinación* (sin repetición) es un subconjunto de n elementos tomados de un conjunto con m elementos, en el que no importa el orden. Aquí $n \leq m$ y $AB = BA$.

Por ejemplo, en las inversiones de una tríada, no importa el orden para definir la identidad del acorde, ya que $\{C, E, G\} = \{E, G, C\} = \{G, C, E\} = \text{Tríada de C}$.

El cálculo de todas las posibles combinaciones de este tipo, se obtiene con la fórmula

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

¿Cuántos intervalos hay en un acorde de séptima? Se trata de la combinación de 4 elementos tomados de 2 en 2:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!(2!)} = 6$$

Finalmente, cuando queremos combinar elementos de conjuntos diferentes, se utiliza la *regla del producto*: si se tienen n conjuntos y se elige un elemento de cada uno, el número total de combinaciones es el producto del tamaño de cada conjunto.

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$$

Por ejemplo, en la Armonía Tradicional se tienen las siguientes funciones tonales para la tonalidad mayor: $T = \{I, vi\}$ $SD = \{IV, ii\} = \{V, vii, iii\}$

¿Cuántas combinaciones posibles hay para una progresión T – SD – D – T ?

$$C = 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$$

Variaciones entre los tetracordes generadores y sus transposiciones

Se buscan opciones con las que se puedan formar series de doce sonidos, primero con los tetracordes recuperados de las 4 series generadoras, por lo que resulta conveniente tener a la mano las transposiciones de los doce tetracordes generadores.

<table border="1"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>11</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>8</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>10</td><td>2</td></tr> </table>	2	0	11	3	3	1	0	4	4	2	1	5	5	3	2	6	6	4	3	7	7	5	4	8	8	6	5	9	9	7	6	10	10	8	7	11	11	9	8	0	0	10	9	1	1	11	10	2	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>0</td><td>11</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>11</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	10	9	4	5	11	10	5	6	0	11	6	7	1	0	7	8	2	1	8	9	3	2	9	10	4	3	10	11	5	4	11	0	6	5	0	1	7	6	1	2	8	7	2	3	9	8	3	4	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>8</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>10</td><td>0</td><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>0</td><td>6</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>10</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>6</td><td>0</td></tr> </table>	6	8	7	1	7	9	8	2	8	10	9	3	9	11	10	4	10	0	11	5	11	1	0	6	0	2	1	7	1	3	2	8	2	4	3	9	3	5	4	10	4	6	5	11	5	7	6	0	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>10</td><td>0</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td></tr> </table>	2	4	5	1	3	5	6	2	4	6	7	3	5	7	8	4	6	8	9	5	7	9	10	6	8	10	11	7	9	11	0	8	10	0	1	9	11	1	2	10	0	2	3	11	1	3	4	0	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td><td>11</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>11</td><td>0</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>11</td><td>10</td></tr> </table>	6	7	0	11	7	8	1	0	8	9	2	1	9	10	3	2	10	11	4	3	11	0	5	4	0	1	6	5	1	2	7	6	2	3	8	7	3	4	9	8	4	5	10	9	5	6	11	10	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>8</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>0</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>2</td></tr> </table>	10	8	9	3	11	9	10	4	0	10	11	5	1	11	0	6	2	0	1	7	3	1	2	8	4	2	3	9	5	3	4	10	6	4	5	11	7	5	6	0	8	6	7	1	9	7	8	2
2	0	11	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	0	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	1	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	3	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	4	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	5	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	6	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	7	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	8	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	9	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	10	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	9	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	10	5	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	11	6	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	0	7	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	1	8	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	2	9	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	3	10	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	4	11	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	5	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	6	1	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	7	2	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	8	3	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	8	7	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	9	8	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	10	9	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	11	10	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	0	11	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	1	0	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	2	1	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	3	2	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	4	3	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	5	4	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	6	5	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	7	6	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	4	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	5	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	6	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	7	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	8	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	9	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	10	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	11	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	0	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	1	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	2	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	3	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	7	0	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	8	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	9	2	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	10	3	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	11	4	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	0	5	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	1	6	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	2	7	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	3	8	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	4	9	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	5	10	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	6	11	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	9	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	10	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	11	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	0	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	1	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	2	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	3	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	4	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	5	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	6	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	7	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	8	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>0</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>10</td><td>6</td></tr> </table>	2	4	11	7	3	5	0	8	4	6	1	9	5	7	2	10	6	8	3	11	7	9	4	0	8	10	5	1	9	11	6	2	10	0	7	3	11	1	8	4	0	2	9	5	1	3	10	6	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>0</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>10</td><td>5</td><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>11</td><td>6</td><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td>7</td><td>6</td><td>11</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>7</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>9</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>10</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>0</td><td>11</td><td>4</td></tr> </table>	6	1	0	5	7	2	1	6	8	3	2	7	9	4	3	8	10	5	4	9	11	6	5	10	0	7	6	11	1	8	7	0	2	9	8	1	3	10	9	2	4	11	10	3	5	0	11	4	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>8</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>4</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>0</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>2</td><td>8</td></tr> </table>	10	8	3	9	11	9	4	10	0	10	5	11	1	11	6	0	2	0	7	1	3	1	8	2	4	2	9	3	5	3	10	4	6	4	11	5	7	5	0	6	8	6	1	7	9	7	2	8	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>8</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>11</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>4</td><td>8</td></tr> </table>	2	0	5	9	3	1	6	10	4	2	7	11	5	3	8	0	6	4	9	1	7	5	10	2	8	6	11	3	9	7	0	4	10	8	1	5	11	9	2	6	0	10	3	7	1	11	4	8	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>3</td><td>4</td><td>11</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>11</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>11</td><td>0</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>0</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td><td>2</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td></tr> </table>	10	3	4	11	11	4	5	0	0	5	6	1	1	6	7	2	2	7	8	3	3	8	9	4	4	9	10	5	5	10	11	6	6	11	0	7	7	0	1	8	8	1	2	9	9	2	3	10	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>8</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>4</td><td>10</td></tr> <tr><td>10</td><td>0</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>0</td><td>6</td></tr> </table>	6	8	1	7	7	9	2	8	8	10	3	9	9	11	4	10	10	0	5	11	11	1	6	0	0	2	7	1	1	3	8	2	2	4	9	3	3	5	10	4	4	6	11	5	5	7	0	6
2	4	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	5	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	6	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	7	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	8	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	9	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	10	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	11	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	0	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	1	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	2	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	3	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	1	0	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	2	1	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	3	2	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	4	3	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	5	4	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	6	5	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	7	6	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	8	7	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	9	8	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	10	9	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	11	10	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	0	11	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	3	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	4	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	5	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	6	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	7	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	8	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	9	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	10	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	11	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	0	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	1	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	2	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	5	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	6	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	7	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	8	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	9	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	10	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	11	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	0	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	1	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	3	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	4	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	3	4	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	4	5	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	5	6	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	6	7	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	7	8	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	8	9	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	9	10	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	10	11	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	11	0	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	0	1	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	1	2	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	2	3	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	8	1	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	9	2	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	10	3	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	11	4	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	0	5	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	1	6	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	2	7	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	3	8	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	4	9	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	5	10	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	6	11	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	7	0	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		

Tabla 5. Transposiciones de los tetracordes generadores.

Lo más sencillo es buscar, entre las transposiciones, permutaciones para los tetracordes de cada una de las cuatro series generadoras, y después calcular el total de variaciones posibles entre las opciones encontradas.

<table border="1"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>11</td><td>3</td></tr> </table>	2	0	11	3	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table>	10	9	4	5	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>8</td><td>7</td><td>1</td></tr> </table>	6	8	7	1
2	0	11	3											
10	9	4	5											
6	8	7	1											
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>11</td></tr> </table>	0	2	3	11	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>10</td><td>9</td></tr> </table>	4	5	10	9	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>8</td><td>1</td><td>7</td></tr> </table>	6	8	1	7
0	2	3	11											
4	5	10	9											
6	8	1	7											
	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>5</td><td>4</td><td>9</td></tr> </table>	10	5	4	9	<table border="1"> <tr><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>1</td></tr> </table>	8	6	7	1				
10	5	4	9											
8	6	7	1											
	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> </table>	4	9	10	5	<table border="1"> <tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td><td>7</td></tr> </table>	8	6	1	7				
4	9	10	5											
8	6	1	7											
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	2	4	5	1	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>7</td><td>0</td><td>11</td></tr> </table>	6	7	0	11	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>8</td><td>9</td><td>3</td></tr> </table>	10	8	9	3
2	4	5	1											
6	7	0	11											
10	8	9	3											
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	2	1	5	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>11</td><td>6</td><td>7</td></tr> </table>	0	11	6	7	<table border="1"> <tr><td>8</td><td>10</td><td>9</td><td>3</td></tr> </table>	8	10	9	3
4	2	1	5											
0	11	6	7											
8	10	9	3											
	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>7</td><td>6</td><td>11</td></tr> </table>	0	7	6	11	<table border="1"> <tr><td>10</td><td>8</td><td>3</td><td>9</td></tr> </table>	10	8	3	9				
0	7	6	11											
10	8	3	9											
	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>11</td><td>0</td><td>7</td></tr> </table>	6	11	0	7	<table border="1"> <tr><td>8</td><td>10</td><td>3</td><td>9</td></tr> </table>	8	10	3	9				
6	11	0	7											
8	10	3	9											

Tabla 6. Permutaciones encontradas para los tetracordes de S_0 y $P_{11}(S_0)$.

C1 2 4 11 7	C2 6 1 0 5	C3 10 8 3 9
T ₂ (D1) 4 2 7 11	T ₄ (A2) 6 5 0 1	T ₂ (A3) 8 10 9 3
	T ₄ (B2) 0 1 6 5	B3 10 8 9 3
	T ₂ (D2) 0 5 6 1	T ₄ (D3) 8 10 3 9
D1 2 0 5 9	D2 10 3 4 11	D3 6 8 1 7
T ₁₀ (C1) 0 2 9 5	T ₄ (A2) 4 3 10 11	A3 6 8 7 1
	T ₄ (B2) 10 11 4 3	T ₁₀ (B3) 8 6 7 1
	T ₁₀ (C2) 4 11 10 3	T ₁₀ (C3) 8 6 1 7

Tabla 7. Permutaciones encontradas para los tetracordes de $T_4(P_5(S_0))$ y $P_7(S_0)$.

En los cuatro casos se encontraron dos permutaciones para el primer tetracorde, cuatro para el segundo y cuatro para el tercero. Por la regla del producto, el número total de combinaciones es:

$$2 \times 4 \times 4 = 32.$$

Sin embargo, es posible cambiar el orden de los tetracordes, por lo que habría 6 permutaciones con cada combinación, de manera que se obtendrían $32 \times 6 = 192$ variaciones para cada serie, por lo tanto, se obtendría un total de $192 \times 4 = 768$ series, la mayoría de ellas no se encontrarán en las matrices, pero algunas sí.

Además de las cuatro series generadoras, es posible reproducir alguna otra serie de la matriz cuando en alguna combinación se encuentren los tres tetracordes de una misma serie generadora con la misma transposición. Por ejemplo:

$$T_2(A_1) \cup T_2(A_2) \cup T_2(A_3) = T_2(S_0)$$

$$T_{10}(B_1) \cup T_{10}(B_2) \cup T_{10}(B_3) = T_{10}(I_4(S_0)) = I_2(S_0)$$

$$T_{10}(C_1) \cup T_{10}(C_2) \cup T_{10}(C_3) = T_{10}(T_4(P_5(S_0))) = T_2(P_5(S_0))$$

$$T_2(D_1) \cup T_2(D_2) \cup T_2(D_3) = T_2(I_0(P_5(S_0))) = I_2(P_5(S_0))$$

Pero aún falta hacer algo similar con los tetracordes derivados, que fueron obtenidos por medio del producto de cuaterniones entre distintas series, así que aún hay más series derivadas por encontrar.

Variaciones entre los tetracordes derivados y sus transposiciones

Ahora se tendrán en cuenta las transposiciones para cada tetracorde generado mediante el producto de cuaterniones. A continuación se presentan las transposiciones de 12 de los 15 tetracordes derivados.

<table border="1"> <tr><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>11</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td></tr> </table>	6	4	8	0	7	5	9	1	8	6	10	2	9	7	11	3	10	8	0	4	11	9	1	5	0	10	2	6	1	11	3	7	2	0	4	8	3	1	5	9	4	2	6	10	5	3	7	11	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	2	0	8	4	3	1	9	5	4	2	10	6	5	3	11	7	6	4	0	8	7	5	1	9	8	6	2	10	9	7	3	11	10	8	4	0	11	9	5	1	0	10	6	2	1	11	7	3	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>0</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>3</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td><td>10</td><td>8</td></tr> </table>	1	5	11	9	2	6	0	10	3	7	1	11	4	8	2	0	5	9	3	1	6	10	4	2	7	11	5	3	8	0	6	4	9	1	7	5	10	2	8	6	11	3	9	7	0	4	10	8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>11</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>9</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>11</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	1	11	3	7	2	0	4	8	3	1	5	9	4	2	6	10	5	3	7	11	6	4	8	0	7	5	9	1	8	6	10	2	9	7	11	3	10	8	0	4	11	9	1	5	0	10	2	6	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>11</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>0</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>3</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td><td>10</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>	7	11	5	3	8	0	6	4	9	1	7	5	10	2	8	6	11	3	9	7	0	4	10	8	1	5	11	9	2	6	0	10	3	7	1	11	4	8	2	0	5	9	3	1	6	10	4	2	<table border="1"> <tr><td>11</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>8</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>10</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>11</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>9</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>10</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>11</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr> </table>	11	7	3	5	0	8	4	6	1	9	5	7	2	10	6	8	3	11	7	9	4	0	8	10	5	1	9	11	6	2	10	0	7	3	11	1	8	4	0	2	9	5	1	3	10	6	2	4
6	4	8	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	9	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	10	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	11	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	0	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	1	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	3	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	4	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	5	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	6	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	7	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	5	11	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	6	0	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	7	1	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	8	2	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	9	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	10	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	11	5	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	0	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	1	7	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	2	8	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	3	9	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	4	10	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	3	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	4	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	5	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	6	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	7	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	8	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	9	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	10	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	11	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	0	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	1	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	2	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	11	5	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	0	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	1	7	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	2	8	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	3	9	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	4	10	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	5	11	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	6	0	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	7	1	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	8	2	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	9	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	10	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	7	3	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	8	4	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	9	5	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	10	6	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	11	7	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	0	8	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	1	9	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	2	10	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	3	11	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	4	0	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	5	1	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	6	2	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
<table border="1"> <tr><td>6</td><td>0</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td>5</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>11</td><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	6	0	8	4	7	1	9	5	8	2	10	6	9	3	11	7	10	4	0	8	11	5	1	9	0	6	2	10	1	7	3	11	2	8	4	0	3	9	5	1	4	10	6	2	5	11	7	3	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>11</td><td>7</td></tr> </table>	4	2	0	8	5	3	1	9	6	4	2	10	7	5	3	11	8	6	4	0	9	7	5	1	10	8	6	2	11	9	7	3	0	10	8	4	1	11	9	5	2	0	10	6	3	1	11	7	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>11</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td>5</td><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>11</td></tr> </table>	2	8	4	0	3	9	5	1	4	10	6	2	5	11	7	3	6	0	8	4	7	1	9	5	8	2	10	6	9	3	11	7	10	4	0	8	11	5	1	9	0	6	2	10	1	7	3	11	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>11</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>10</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>8</td><td>6</td></tr> </table>	1	11	9	7	2	0	10	8	3	1	11	9	4	2	0	10	5	3	1	11	6	4	2	0	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	10	8	6	4	11	9	7	5	0	10	8	6	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>7</td><td>5</td><td>11</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>11</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td><td>10</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td>5</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>0</td><td>6</td><td>4</td><td>10</td></tr> </table>	1	7	5	11	2	8	6	0	3	9	7	1	4	10	8	2	5	11	9	3	6	0	10	4	7	1	11	5	8	2	0	6	9	3	1	7	10	4	2	8	11	5	3	9	0	6	4	10	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>10</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>10</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr> </table>	7	5	3	1	8	6	4	2	9	7	5	3	10	8	6	4	11	9	7	5	0	10	8	6	1	11	9	7	2	0	10	8	3	1	11	9	4	2	0	10	5	3	1	11	6	4	2	0
6	0	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	1	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	2	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	3	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	4	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	5	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	6	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	7	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	8	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	9	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	10	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	11	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	8	4	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	9	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	10	6	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	11	7	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	0	8	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	1	9	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	2	10	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	3	11	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	4	0	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	5	1	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	6	2	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	7	3	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	9	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	10	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	11	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	0	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	1	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	2	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	5	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	7	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	8	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	7	5	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	8	6	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	9	7	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	10	8	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	11	9	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	0	10	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	1	11	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	2	0	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	3	1	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	4	2	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	5	3	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	6	4	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
7	5	3	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
8	6	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
9	7	5	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
10	8	6	4																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
11	9	7	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
0	10	8	6																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
1	11	9	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
2	0	10	8																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
3	1	11	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
4	2	0	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
5	3	1	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
6	4	2	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																		

Tabla 8. Transposición de los tetracordes derivados.

Se procede a buscar nuevas series dodecafónicas. Para esto se elige un primer tetracorde –puede ser uno que aparezca con varias permutaciones–, y a continuación se seleccionan algunos que no repitan elementos del primero, para finalmente buscar cualquier permutación disponible con los elementos que faltan. Este procedimiento terminará varias veces en ‘callejones sin salida’, hasta encontrar una opción adecuada, como ocurre en el siguiente caso.

$$\{0, 4, 6, 8\} \cup \{1, 5, 7, 11\} \cup \{2, 3, 9, 10\}$$

Los elementos se dispusieron en orden ascendente, pero cualquier permutación funciona. Al encontrar una combinación que sí es posible, se buscan todas las permutaciones disponibles para cada tetracorde que estén presentes entre los tetracordes derivados.

<table border="1"> <tr><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>0</td></tr> </table>	6	4	8	0	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>1</td><td>11</td><td>5</td></tr> </table>	7	1	11	5	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>9</td><td>10</td></tr> </table>	3	2	9	10
6	4	8	0											
7	1	11	5											
3	2	9	10											
<table border="1"> <tr><td>6</td><td>0</td><td>8</td><td>4</td></tr> </table>	6	0	8	4	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>7</td><td>5</td><td>11</td></tr> </table>	1	7	5	11	<table border="1"> <tr><td>9</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td></tr> </table>	9	2	3	10
6	0	8	4											
1	7	5	11											
9	2	3	10											
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td></tr> </table>	4	8	6	0		<table border="1"> <tr><td>3</td><td>10</td><td>9</td><td>2</td></tr> </table>	3	10	9	2				
4	8	6	0											
3	10	9	2											
<table border="1"> <tr><td>8</td><td>6</td><td>0</td><td>4</td></tr> </table>	8	6	0	4										
8	6	0	4											
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>8</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table>	0	8	4	6										
0	8	4	6											

Tabla 9. Permutaciones disponibles para los tetracordes derivados elegidos.

En este caso se tendrían $5 \times 2 \times 3 = 30$ combinaciones, y $30 \times 6 = 180$ variaciones.

Discusión

El uso del producto de cuaterniones resulta ser una herramienta eficiente para generar tetracordes derivados, tanto dentro de una misma serie, como entre los tetracordes de las mismas.

La mayoría de esos tetracordes, que pueden ser obtenidos manualmente o con el apoyo de hojas de cálculo o lenguajes de programación, no se encuentran dentro de las series de las matrices, por lo que resultan ser permutaciones, en el caso más cercano, si no es que son secuencias nuevas, diferentes, que aportan variedad al material del compositor serial.

Para completar el objetivo de obtener *series derivadas*, se recurrió a la Combinatoria. En el caso de los tetracordes que provienen de las cuatro series generadoras – S_0 multiplicada por los operadores P_1 , P_{11} , P_5 y P_7 – se obtuvieron 768 variaciones; al trabajar con los tetracordes generados por el producto entre los tetracordes antes mencionados, con las posibilidades de tan sólo una posible serie derivada, se obtuvieron 180 variaciones, lo que resultó en un total de **948** series, las 4 generadoras, otras 4 que sí pertenecen a las matrices, y 940 derivadas con esta propuesta, y todavía se puede buscar si hay más opciones disponibles, por lo que posiblemente el número sea mayor, ya que aquí únicamente se trabajó con la primera combinación confirmada de tetracordes que llevarían a una serie derivada. Aún así, es más material del que usaría un compositor en su obra.

Si se comparan, únicamente en movimiento directo, las cuatro series generadoras con aquellas derivadas mediante este procedimiento, se pueden apreciar las diferencias ya sea en sus estructuras o en sus secuencias interválicas, según lo que se prefiera analizar. En la siguiente tabla se muestran algunas comparaciones; se presentan las estructuras de las series ya que no se utilizó ninguna línea melódica para tener información acerca de la dirección de los intervalos. Cuando alguna serie derivada comience de manera similar o con alguna permutación del primer tetracorde –aunque podría ser con cualquier otro–, se puede hacer más evidente la diferencia.

Serie

S_0	{2, 0, 11, 3, 10, 9, 4, 5, 6, 8, 7, 1}
$P_{11}(S_0)$	{2, 4, 5, 1, 6, 7, 0, 11, 10, 8, 9, 3}
$T_4(P_5(S_0))$	{2, 4, 11, 7, 6, 1, 0, 5, 10, 8, 3, 9}
$P_7(S_0)$	{2, 0, 5, 9, 10, 3, 4, 11, 6, 8, 1, 7}
$T_2(A_1) \cup T_8(D_2) \cup T_2(A_3)$	{4, 2, 1, 5, 6, 11, 0, 7, 8, 10, 9, 3}
$T_{10}(C_1) \cup T_4(B_2) \cup T_{10}(B_3)$	{0, 2, 9, 5, 10, 11, 4, 3, 8, 6, 7, 1}
$T_5(A_2) \cup B_1(A_1) \cup B_3(B_2)$	{3, 2, 9, 10, 6, 0, 8, 4, 7, 1, 11, 5}
$T_1(A_3(C_2)) \cup B_3(B_2) \cup T_{11}(D_2)$	{0, 8, 4, 6, 1, 7, 5, 11, 9, 2, 3, 10}

Se puede apreciar como $T_{10}(C_1) \cup T_4(B_2) \cup T_{10}(B_3)$ consiste de permutaciones de $P_7(S_0)$, de la misma manera que ocurre entre las series $T_2(A_1) \cup T_8(D_2) \cup T_2(A_3)$ y $P_{11}(S_0)$; esta última comparte dos elementos del segundo tetracorde y tres del tercero con la serie $T_1(A_3(C_2)) \cup B_3(B_2) \cup T_{11}(D_2)$. Estas series aportan variedad sin alejarse demasiado del material generador mientras que, por su

parte, $T_1(A_3(C_2)) \cup B_3(B_2) \cup T_{11}(D_2)$ tiene menos en común con las demás, lo cual puede ser útil cuando se busca contraste.

La introducción de más tetracordes, obtenidos por medio de alguna otra técnica, podría potenciar las opciones disponibles para una misma obra.

Conclusiones

En el desarrollo de una obra musical en la que se trabajó con la técnica del Serialismo, utilizar únicamente las series contenidas en las matrices puede ser limitante; si bien es cierto que la matriz multiplicativa duplica el potencial, ya que se obtienen 96 series en lugar de 48, también lo es el hecho de que resultan ser transposiciones de ocho direcciones melódicas, cuatro en cada matriz, con la misma lógica de construcción.

En ese sentido, Schönberg decía que una serie invariante de intervalos funciona a manera de motivo (Schönberg 1975), pero para un oído entrenado puede resultar monótono o aburrido escuchar todo el tiempo esas mismas relaciones interválicas transportadas algún número de semitonos hacia arriba o hacia abajo, lo cual corresponde, precisamente, con los demás renglones o columnas de las matrices, y eso finalmente se detecta, consciente o inconscientemente.

Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente (Novoa & Lluís-Puebla 2026), en la composición de música académica, el desarrollo de variantes a partir de una idea generadora es importante para asegurar coherencia en el discurso musical, por lo que se debe recurrir a técnicas de derivación que permitan obtener material con variaciones significativas para salvar este tipo de ‘endogamia’ en la composición serial.

El *producto de cuaterniones*, que generalmente se emplea para modelar rotaciones espaciales de una manera más simple, ofrece una herramienta para generar tetracordes en la técnica de composición serial. Estos tetracordes llevan, a su vez, a la obtención de series derivadas, y la mayoría de ellas no se encuentran en las matrices, por lo que ofrecen variedad en su estructura.

Para ese proceso de derivación, se sistematiza el trabajo mediante el uso de *combinatoria*. Los cálculos de las opciones posibles sólo muestran el potencial, mientras que cada compositor elegirá aquellas series que le resulten más convenientes en el desarrollo de sus obras musicales. Si bien el ensayo y error para encontrar combinaciones adecuadas para la obtención de series derivadas puede parecer algo complicado o tedioso al inicio, el proceso se vuelve más ágil con la práctica, y en cambio, con el uso de alguna herramienta numérica adecuada, ofrece una cantidad mucho mayor de posibilidades con cada acierto que las que se obtienen de la manera tradicional, como lo hacían Schönberg, a partir de hexacordes, o Webern, a partir de tricordes, justificando la propuesta de herramientas matemáticas como apoyo al proceso de composición.

Finalmente, aunque hay herramientas numéricas potentes para realizar los cálculos, no siempre son del dominio público entre los músicos, por lo que se pensó en elaborar una programación básica

en hojas de cálculo, que están al alcance de cualquier persona con una computadora personal o incluso una tableta. Estos archivos se podrán utilizar tanto para la generación de ambas matrices de series –las opciones en línea únicamente ofrecen la matriz aditiva–, como para la obtención de tetracordes derivados, por lo que estarán disponibles para quienes los soliciten a los autores.

Referencias bibliográficas:

- Agustín-Aquino, Octavio A. & du Plessis, Janine & Lluís-Puebla, Emilio & Montiel, Mariana. 2009. *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, Serie: Textos, Vol. 10. Sociedad Matemática Mexicana.
- Babbitt, Milton. 1960. "Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants". *The Musical Quarterly* 46, n.º 2 (1960): 246-59.
- Babbitt, Milton. 1961. *Set Structure as a Compositional Determinant*. *Journal of Music Theory*, vol. 5, no. 1, pp. 72–94.
- Babbitt, Milton. 2003. *The Collected Essays of Milton Babbitt*. Edited by Stephen Peles, Stephen Dembski, Andrew Mead and Joseph N. Straus. Princeton University Press.
- Boulez, Pierre. 1990. *Apuntes de un aprendiz*. Compilado por Paule Thévenin, traducido por Víctor Casas y Juan Luis Delmont. Barcelona: Gedisa.
- Covach, John. 2002. *Twelve-Tone Theory*, in *The Cambridge History of Western Music Theory*, ed. Thomas Christensen, (Cambridge University Press), pp. 603-627.
- Forte, Allen. 1973. *The structure of atonal music*. Yale University Press.
- Conway, John H. & Smith, Derek A. 2003. *Quaternions and Octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. Wellesley, MA: AK Peters.
- Mazzola, Guerino. 2002. *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*. Basilea: Birkhäuser.
- Novoa, Raúl. 2022. *Formalización matemática de conceptos musicales*. [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad a Distancia de México.
- Novoa, Raúl & Lluís-Puebla, Emilio. 2026. *Producto vectorial como herramienta de desarrollo en la composición microserial*. Publicaciones Electrónicas del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades. Academia de Ciencias, Vol. 7 (2026).
- Perle, George. 1991. *Serial Composition and Atonality: An Introduction to the Music of Schoenberg, Berg, and Webern*. 5ª Ed. University of California Press.
- Straus, Joseph N. 1989. *Introduction to post-tonal theory*. Prentice Hall.
- Schönberg, Arnold. 1975. *Style and Idea*. New York, St, Martin's Press, p. 219.
- Xenakis, Iannis. 1992. *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition*. Edición revisada. Hillsdale, NY: Pendragon Press.