

Enseñanza de Geometría en América Latina, Siglo XXI

Emilio Lluis Riera

Prefacio

Es un honor para las “Publicaciones Electrónicas de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades” contar con el artículo del Dr. Emilio Lluis Riera, “Enseñanza de Geometría en América Latina”. Fue escrito en 1986 y su vigencia permanece más que nunca. Este artículo fue publicado en “Studies in Mathematical Education” Vol. 5, 1986, UNESCO.

En este artículo, el autor nos describe entre otras cosas, cómo los resultados obtenidos en la enseñanza de geometría “son muy similares a aquellos obtenidos en casi todas partes del mundo. Y, como en el resto del mundo, muchos grupos de matemáticos están expresando la esperanza de que la geometría -la más antigua teoría matemática, que fue por tantos siglos el método por excelencia para la formación del cerebro humano en el pensamiento lógico, y que, de pronto, en el espacio de unas pocas décadas, desapareció completamente del horizonte educativo- jugará, otra vez su propio papel”.

Invitamos al lector a leer este interesante artículo.

Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades.

ENSEÑANZA DE GEOMETRIA EN AMERICA LATINA

Emilio Lluís

Diversidad en medio de la heterogeneidad

Si se nos preguntara cuál es la principal característica de la enseñanza de geometría en América Latina, en el momento actual, yo replicaría que es, sin dudas, la carencia de ideas acerca de lo que se debe enseñar. Y también diría que esta condición no es exclusiva de América Latina ya que se mantienen puntos de vista radicalmente opuestos, aún en algunos de los países más avanzados del mundo. En algunos países, la enseñanza de la geometría, como tal, ha sido casi completamente suprimida. Otros, respetuosos de la tradición y defendiendo los valores formativos de la geometría pura, suministran cursos completos e independientes de varios años de duración en esta disciplina. Otros, además, evitando la fácil precisión del álgebra, enseñan una geometría carente de su carácter específico y generalmente pobre en contenido.

Aunque no se llegó a tales extremos, América Latina está atravesando un período similar de indecisión y carencia de dirección. Esto dificulta la descripción, en términos generales, del estado actual de la enseñanza de geometría. Nosotros también tenemos que tener presente que América Latina no es una región completamente homogénea. Sus países podrían, tal vez, agruparse en tres regiones, mostrando, cada una, características relativamente uniformes. La primera podría incluir ciertos países en la parte norte de América del Sur, América Central, México y algunos países del Caribe; el vasto territorio de Brasil con sus características muy especiales podría constituir la segunda región; la tercera región estaría formada por países tales como Argentina, Chile y Uruguay. Resulta de ello, que las descripciones, datos y observaciones contenidas en este informe, no son siempre aplicables a todos los países de América Latina, si bien ellos son aplicables a regiones particulares.

Puesto que no hay uniformidad en cuanto a la división de los alumnos en los niveles educativos, es necesario, por razones de conveniencia lingüística, definir el significado de ciertas expresiones. Los primeros seis años de escolaridad, aproximadamente el grupo de edad 6 a 11 años, será referido como escuela primaria o nivel elemental. Los próximos cinco a seis años, aproximadamente de 12 a 17 años, será referido como educación escolar media o nivel secundario. Después viene el nivel más alto o sea nivel universitario.

Algunos antecedentes

Puesto que la enseñanza actual de la geometría es el resultado de una larga serie de cambios, unas pocas observaciones sobre sus antecedentes históricos en América Latina pueden ser útiles.

Mientras la primera mitad de este siglo fue marcada por una serie de cambios en la enseñanza de la aritmética y el álgebra, la geometría permaneció básicamente incambiada. Se puede decir que, desde el principio de siglo hasta 1950 y 1960, se enseñó la misma clase de geometría, tanto a nivel primario como secundario, es decir pasó medio siglo sin cambios. Ciertos textos, tales como el admirable de Wentworth y Smith (editado en 1915) se continuó usando en muchas áreas de América Latina durante este período. En otras partes, los textos de geometría estaban en una línea similar. Vale la pena puntualizar que durante este período la población estudiantil permaneció moderadamente estable, y que los docentes del nivel secundario recibieron una muy buena formación en geometría.

Como resultado, un alto porcentaje de alumnos egresaron de la escuela secundaria con un fuerte conocimiento de la geometría euclídeana. Sin embargo, la dificultad para presentar adecuadamente la geometría en los primeros años de educación secundaria, junto con el enorme crecimiento de la población estudiantil en muchos países, con la correspondiente formación acelerada de docentes, condujo, en el espacio de pocos años, a un serio deterioro en la enseñanza de geometría. Además, hubo una drástica reducción en el suministro de cursos de geometría. He aquí un ejemplo:

Educación media (12 a 17 años)

Años (aproximadamente)	1870	1910	1960
Duración de la educación media (años)	4	4	5-6
Número total de cursos (todas las materias)	29	36	64
Número de cursos de matemática	5	4	6
Número de cursos de geometría	2	2	1

La tabla muestra que la proporción de los cursos de geometría cayó de 7 a 5 por ciento y subsecuentemente a 1.5%. Ello muestra, también, que la proporción de cursos de matemática cayó de 17 a 11 por ciento y subsecuentemente a 9%. Además, la única clase de geometría que se enseña últimamente es geometría analítica. Esta se enseña en los últimos años de educación secundaria y su contenido geométrico es casi nulo.

Como un resultado de esta reducción en el número de cursos de geometría, unos pocos temas de geometría euclídeana diseminados en todos los cursos de álgebra fue todo lo que permaneció en los currículos de matemática. Esto causó una pérdida gradual de conexión entre ellos; además, los temas de geometría más interesantes desaparecieron, retrasando aquellos temas "que no requerían un conocimiento previo". Estos en lo principal eran descripciones, clasificaciones, resultados casi triviales y, desde luego, "definiciones". Fue en este punto y en muchos lugares, (aunque no en todos los países como corresponde puntualizar) que la enseñanza de geometría a nivel secundario, alcanzó su más bajo nivel, como se puede notar por una simple mirada a los libros de textos utilizados en la oportunidad.

- El punto geométrico es un elemento cuya dimensión no puede ser cuantificada.

- Un plano es una superficie plana ilimitada, o usando "teoría de conjuntos" (para ser modernos):

- Un plano es un conjunto de puntos que forman una superficie completamente plana.

- Un rayo es un conjunto de puntos que siguen a su origen o vértice.

- Los extremos de una recta se denominan puntos. Y esto, con un toque de "nueva matemática".

- Un conjunto es finito si se puede contar en un período razonable de tiempo

El impacto de la "nueva matemática"

Fue, precisamente, durante esta oscura etapa -cuando la enseñanza de geometría cayó en muchos lugares a esa increíble profundidad- que las amplias corrientes de la "nueva matemática" o "*matemática moderna*" (dependiendo de su origen) hicieron su aparición repentinamente, seguidas por fuertes gritos de "abajo Euclides" -un slogan que, incidentalmente, no tenía sentido en aquellos lugares donde Euclides ya no existía. Antes de continuar con este informe, puede ser útil comentar, entre paréntesis, la influencia que los países ejercen entre ellos. Tal influencia es mucho más grande de lo que se piensa. Y es obvio que la influencia más grande vino de los países más avanzados. Por ejemplo, en países situados en bajas latitudes, cerca del Ecuador, los niños dibujan la luna, frecuentemente así:



Mientras que ellos la ven así:

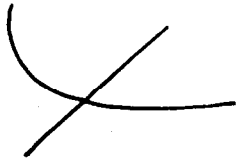


La influencia señalada es demasiado obvia. Generalmente, esta clase de cosas no causa mayor problema, pero demasiada influencia puede ser algunas veces, una fuente de gran preocupación. Un ejemplo es la enseñanza irregular de geometría, en los años a que no hemos referido, bajo la poderosa influencia de la "matemática moderna" y el slogan "abajo Euclides".

Con la necesidad primordial de adaptarse a las nuevas ideas, tuvieron lugar una serie de cambios. Mientras los resultados eran buenos en algunas áreas, en otras ellos fueron solamente regulares y en muchas áreas muy malos. En los ejemplos ya citados se encuentran algunos elementos de "matemática moderna" puesto que ya se hizo referencia a la "teoría de conjuntos". Esto es evidente por ejemplo, en el enunciado de que "un plano es un *conjunto* de puntos que forman una superficie completamente plana", o que "un conjunto es finito si se puede contar en un período de tiempo razonable".

A continuación hay dos ejemplos más del efecto de estas influencias (en la escuela secundaria).

1) Cuando dos líneas tienen uno o más puntos en común el *conjunto* de estos puntos se denomina *intersección* de los conjuntos en cuestión. Según el tipo de intersección las líneas se clasifican en:



Secantes: un punto de intersección.



Tangentes: un punto de intersección sin atraversarse



Líneas incidentes: la intersección es una línea.



Líneas coincidentes: la intersección es toda su extensión.

2. En el estudio de cuerpos deberíamos distinguir cuatro tipos de conjuntos: puntos, líneas, superficies, cuerpos. Los puntos son *elementos* indivisibles. Las líneas son *conjunto* de puntos en sucesión y de manera continua. (En otras palabras, por muy carente de sentido que una "definición" pueda ser, solamente se tiene que agregar palabras mágicas tales como "conjunto", "elemento" o "intersección", palabras presentes en la corriente de la "matemática moderna", dado el uso que se hace de la "teoría de conjunto").

Causas de la declinación

En vista de esta situación, una observación de una contribución de A.G. Howson (Congreso Internacional de Educación Matemática, 1977, pág. 205) toma una gran significación: "Durante la década de 1960, los materiales proyectados fueron traducidos y transferidos entre (yo diría a) los países pero con insuficiente atención prestada a las diferencias sociales, educativas y culturales" (1).

Nosotros comentamos a continuación algunas de estas deficiencias, pero comenzaremos enunciando las tres principales causas que, desde nuestro punto de vista, llevan a la enseñanza de geometría a su más bajo nivel. La primera fue la extensión y aceptación de la idea de que la necesidad básica y más importante era la "teoría de conjuntos", de manera que la enseñanza, tanto a nivel primario como secundario, se concentró sobre esto. Puesto que tales conceptos no formaban parte de la formación del maestro, otra consecuencia fue que se dedicara, en cada clase, mucho tiempo a la enseñanza de teoría de conjuntos y que otros temas del currículo no se dieran -casi invariablemente aquellos del campo de la geometría. En segundo lugar, aún el maestro con un buen conocimiento de la geometría euclídeana no sabía si debía o no enseñarla. Por una razón, Euclides no era "moderno" y además, la palabra era

(1) Los paréntesis están en el informe; ellos no son del autor.

"abajo Euclides". En tercer lugar, aún, si él decidía, a pesar de todo, enseñar geometría euclídeana él era asaltado por la duda de cómo proceder: ¿como antes? ¿usando transformaciones? ¿usando coordenadas? ¿usando vectores?.

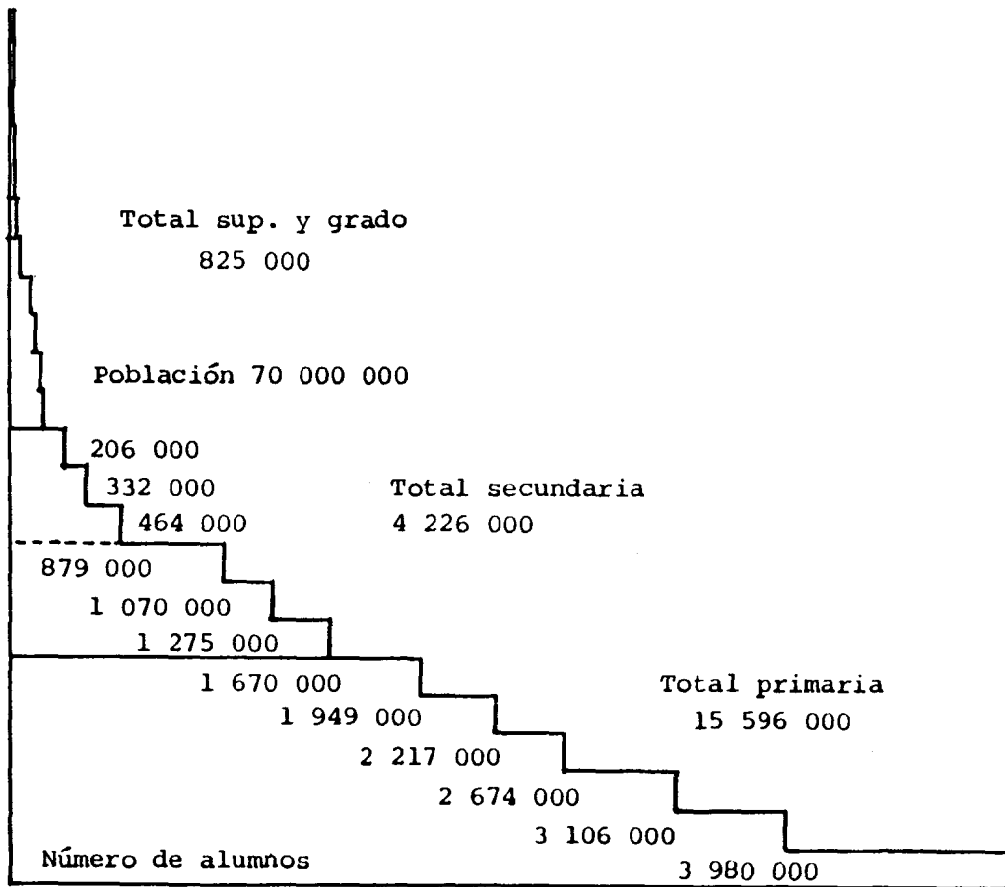
Algunos problemas típicos

Se ha hecho ya una breve referencia a lo que puede suceder en un país cuando él recibe, adapta, prueba y ocasionalmente adopta alguna de las nuevas ideas "flotantes" en el medio ambiente internacional. Los resultados son algunas veces muy buenos, algunas veces regulares, pero algunas veces también muy malos (ya hemos dado ejemplos). Esto depende en gran medida de las diferencias sociales, culturales y educativas. Los resultados son generalmente buenos cuando las condiciones específicas en el país son similares a aquellas de los países más comprometidos en el desarrollo de nuevas ideas; donde las condiciones son muy diferentes, los resultados son generalmente malos.

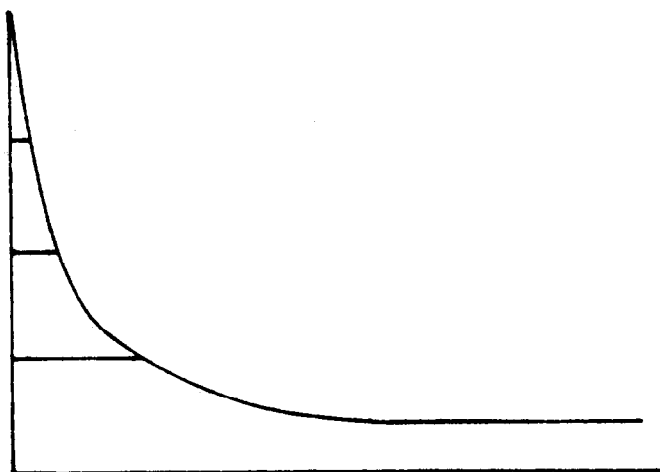
Las diferencias son, generalmente, muy grandes, mucho más grande de lo que se piensa. Aún entre países de América Latina hay grandes diferencias.

La figura de la página siguiente da datos para un sistema educativo típico en una de las regiones. (Aspectos sociales y culturales son más difíciles de cuantificar).

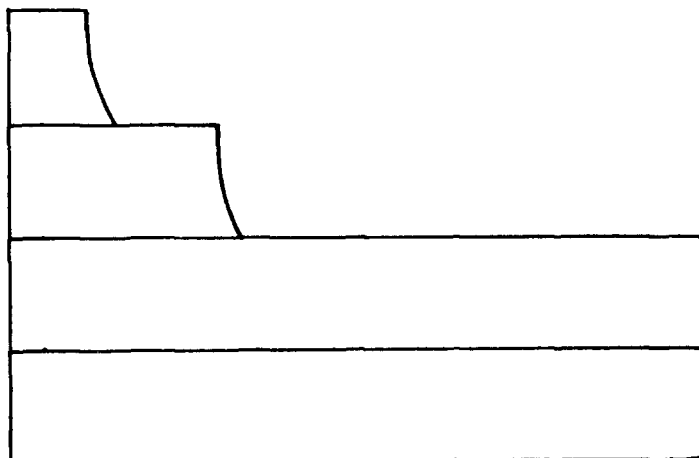
	Grado		Edad apr.
Superior	5	23	
	4	22	
	3	21	
	2	20	
	1	19	
	1	18	
Secundaria	6	17	
	5	16	
	4	15	
	3	14	
	2	13	
	1	12	
Primaria	6	11	
	5	10	
	4	9	
	3	8	
	2	7	
	1	6	



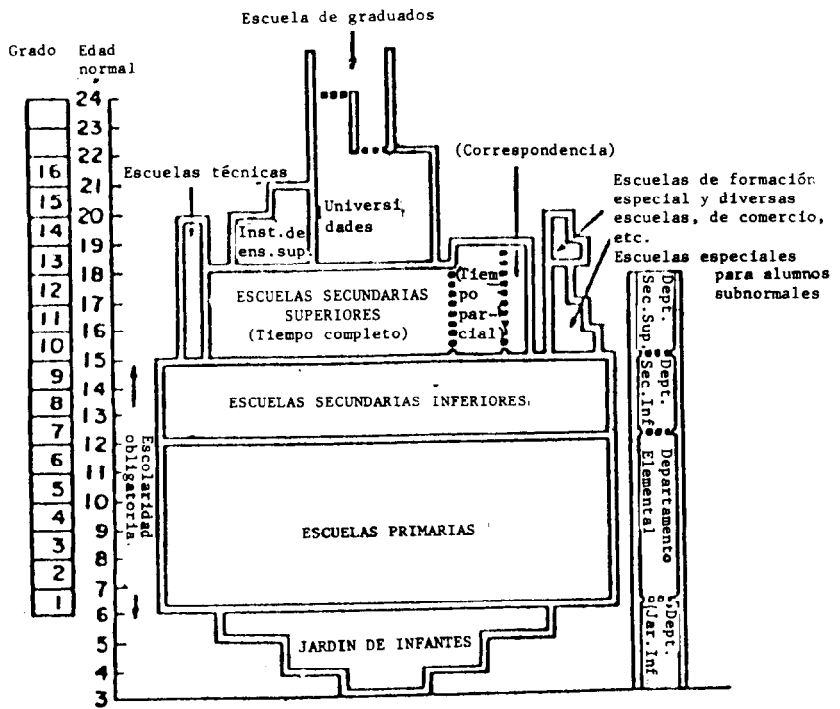
Como en el ejemplo anterior, los estudiantes con educación a tiempo completo, en muchos países de América Latina, muestran este tipo de curva:



La curva correspondiente en los países más avanzados es probablemente como esta:



Un ejemplo es la situación en Japón, hace diez o quince años.



Algunos, pero solamente unos pocos, países de América Latina tienen modelos similares.

Podría pensarse que una curva que alcanza un punto anguloso, refleja un gran incremento en población. Hay algo de verdad en esto, pero no demasiado. Esto surge claro para la población de una generación (Castrejón Díez, 1983, pág. 51).

CANTIDADES PARA UNA GENERACION

Año	Años de estudio	Número de estudiantes	Porcentaje de estudiantes en el año	Número de estudiantes que abandonaron los estudios
1959	1	3 007 013	100%	1 172 317
60	2	1 834 696	61%	375 053
61	3	1 459 643	49.74%	319 245
62	4	1 140 398	37.92%	170 855
63	5	969 543	32.24%	69 284
64	6	900 259	29.97%	580 709
65	7	329 550	10.63%	79 086
66	8	240 464	8%	36 395
67	9	204 069	6.79%	66 164
68	10	137 905	4.59%	33 758
69	11	104 147	3.46%	12 935
70	12	91 212	3.03%	6 396
71	13	84 816	2.82%	20 534
72	14	64 282	2.14%	6 723
73	15	57 559	1.91%	14 351
74	16	43 208	1.44%	6 341
75	17	36 867	1.23%	

Una simple ojeada a tales datos (necesariamente limitados, puesto que ellos se refieren solamente al número de alumnos) muestra el amplio espectro de problemas involucrados, que no resultan pertinentes aún en los sistemas más avanzados. Por ejemplo, en el simposio realizado en Varsovia en 1983 por la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI), una de las cuestiones para discusión fue: "¿Qué matemática debería enseñarse en las escuelas secundarias en el caso en que la preparación para la universidad no es más el objetivo básico de aquellas escuelas"?

En muchos países de América Latina esta pregunta se divide en muchas otras preguntas. Por ejemplo, teniendo en mente geometría, nosotros preguntaríamos: "¿Qué clase de geometría debería enseñarse en las escuelas primarias, puesto que el 90 por ciento de los alumnos no continúan su educación?" Además, dado que el porcentaje de alumnos que completan su educación superior es tan pequeño (por ejemplo, 1.23% de aquellos que la iniciaron) y también, que el papel que este limitado grupo jugará en el futuro del país, será vital, ¿qué clase de geometría debería enseñarse a través del sistema educativo? ¿Solamente la que es requerida por otras asignaturas? ¿La que puedan necesitar los estudiantes en su vida de trabajo? ¿La diseñada para ofrecer una mejor formación intelectual? ¿Cuál es el peso relativo que debiera darse a tales consideraciones?

Esta clase de preguntas son las que enfrentan las autoridades educativas en muchos países y también los grupos de matemáticos que están preocupados por la situación presente.

Muchas personas rechazan la idea de minimizar la importancia del estudio de geometría como la mejor forma de capacitar para el desarrollo del razonamiento lógico.

Pero hay amplias dudas acerca de como proceder, particularmente en sociedades donde los sistemas educativos (y la situación general) plantean la clase de problemas que hemos visto.

Características imperantes

Históricamente, la influencia del medio ambiente internacional y las características específicas de cada región o país han llevado, como se dijo anteriormente, a una gran variedad de situaciones. Nosotros resaltaremos algunas que son, tal vez, características particulares de la enseñanza de geometría en América Latina.

1. *Se usan toda clase de enfoque básicos.* Ellos incluyen: el método euclideo tradicional (el que tiende a desparecer rápidamente); métodos basados sobre la axiomática de Hilbert (poco usado hoy día); métodos basados sobre la axiomática de Birkhoff (siguiendo, por ejemplo, el Mathematical Study Group); método de las transformaciones (en algunas áreas en la escuela primaria); método vectorial, algunas veces combinado con algunos de los otros métodos mencionados; y método que utilizan coordenadas.

Dos puntualizaciones son necesarias aquí. Primero, el enfoque varía, a menudo, en un país como entre los distintos niveles educativos y aún dentro de un nivel dado. Se encuentra, por ejemplo, casos extremos, como el siguiente: un alumno comienza estudiando geometría, en la escuela primaria, usando el método de las transformaciones geométricas; en el primer curso de escuela secundaria pasa al tipo de geometría euclidea; en el segundo, vuelve a usar transformaciones; en el tercero, estudia la geometría basándola en la axiomática de Hilbert; en el cuarto se usa en enfoque de Birkhoff y en el quinto curso se usan coordenadas.

La segunda puntualización es que, aunque en muchos países el concepto de coordenadas se introduce a nivel primario, no es usado sistemáticamente en la geometría analítica hasta los últimos años de enseñanza secundaria.

Curiosamente, además, casi nunca resulta claro determinar si las coordenadas están siendo introducidas en el plano euclideo y en el espacio con el que el alumno ya es familiar, o si el plano y el espacio están siendo construidos sobre la base de los números reales.

2. Analizando los resultados de los datos disponibles, se llega a la conclusión de que el *éxito en la enseñanza de geometría ha sido virtualmente independiente de cuál de los métodos anteriores ha sido usado.*

Como podría esperarse, el principal factor ha sido la calidad de los grupos iniciadores de los cambios - la calidad de sus materiales y de su contacto con los docentes en el aula.

3. Una característica ya mencionada es que, en la educación secundaria, *la enseñanza de la geometría, como tal, ha sido prácticamente eliminada.* Aún la geometría analítica es tá, algunas veces, incorporada a los cursos de cálculo.

4. En un período de unos pocos años, la enseñanza de geometría en la mayoría de los países de América Latina ha pa sado por *muchos cambios.* (Esta característica es común a muchos países del mundo). Antes que un cambio se haya asimilado, se ha introducido otro. Los cambios se hacen, generalmente, sobre la base de *poca o ninguna experimentación.* No hay tiempo para llevar a cabo evaluaciones, puesto que falta la documentación adecuada. La causa principal de estos rápidos cambios es la influencia del medio ambiente internacional. O tros factores son el rápido crecimiento de la población esc olar y la diversificación de estudios.

5. En un cierto número de países, grupos de matemáticos están emprendiendo significativos estudios sobre la enseñanza de la matemática, particularmente de geometría. Una ca racterística común a todos estos grupos son los pocos recursos financieros de que disponen. La divulgación de sus resultados es limitada y la colaboración entre ellos es casi inexistente. Por ejemplo, el trabajo del School Mathematics Project, el Institut de recherche sur l'enseignement des Mathématiques (IREM), el del Mathematical Study Group, etc. es conocido en todos lados. Pero las *personas no son conscientes de lo que se está haciendo* en otros países de América Latina, ni aún del trabajo que se está realizando en su propio país.

6. Lo mismo puede decirse de los grupos que están realizando valioso trabajo en el área de la evaluación educativa.

7. *La formación docente es de calidad muy variada.* Por ejemplo, en la educación media, se encuentra, algunas veces en el mismo país, docentes con mejor capacitación en geometría y docentes que carecen de toda formación en geometría.

8. No hay casi estudios sobre el tema de qué matemática debería enseñar en general, (menos aún en geometría) en las próximas décadas en los distintos países de América Latina.

¿Una vuelta a la geometría?

Lo extraño, en el último análisis, es que a pesar de los problemas muy especiales de muchos países de América Latina, los resultados obtenidos en la enseñanza de geometría son muy similares a aquellos obtenidos en casi todas partes del mundo. Y, como en el resto del mundo, muchos grupos de matemáticos están expresando la esperanza de que la geometría -la más antigua teoría matemática, que fue por tantos siglos el método por excelencia para la formación del género humano en el pensamiento lógico y que, de pronto, en el espacio de unas pocas décadas, desapareció completamente del horizonte educativo- jugará, otra vez su propio papel y que, parafraseando a Polya, nosotros podemos decir una vez más que "la geometría desarrolla la mente" - después que sepamos qué clase de geometría enseñar y como hacerlo.

Referencias

Castrejón Diez, J. *Perfiles Educativos*. México, Universidad Nacional Autónoma de México.

Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática
Karlsruhe, 1976.

1977. *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*. Karlsruhe, Universidad de Karlsruhe.

* * *