1

Topología Algebraica y sus aplicaciones.

Dr. Emilio Lluis-Puebla

2

- Problemas matemáticos
- Método para resolverlos
- Teoría Matemática

3

Henri Poincaré (1856-1912)

4

Homología

Λ un anillo y $\{M_i\}$ una familia de Λ-módulos

$\ldots \to M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1} \to \ldots$

$f_{i-1}: M_{i-1} \to M_i \quad f_i: M_i \to M_{i+1}$

semiexacta $\quad f_i \circ f_{i-1} = 0$

Exacta si $\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1}$

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

$0 \to N \to M \to M/N \to 0$

5

$\{C_n\}$. $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}$, $\partial_n\partial_{n+1} = 0$.

Un *complejo de cadenas o cadena* sobre Λ es una pareja $C = \{C_n, \partial_n\}$ y la escribimos como sigue:

$C: \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$

6

Definición:

Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$, $D = \{D_n, \partial_n\}$. Morfismo de cadenas

$\varphi: C \to D \quad \{\varphi_n: C_n \to D_n\}$

$C: \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$

$\varphi \downarrow \quad \varphi_{n+1}\downarrow \quad \varphi_n \downarrow \quad \varphi_{n-1}\downarrow$

$D: \ldots \to D_{n+1} \to D_n \to D_{n-1} \to \ldots$

Complejo de cadena, 1900, Poincaré

$\partial_n: C_n \to C_{n-1}$

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

50 años

7

$C: \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$

$\partial_{n+1}: C_{n+1} \to C_n \quad \partial_n: C_n \to C_{n-1}$

El módulo de homología de grado n de C, denotado con $H_n(C)$ es el cociente $H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$

Asociar a una cadena C un módulo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ que llamaremos *homología de la cadena C*.

8

Un morfismo de cadenas $\varphi: C \to D$ induce un morfismo (bien definido, de grado 0) $\varphi_*: H_*(C) \to H_*(D)$ de módulos graduados.

Luego, $H_*(\_)$ es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas a la categoría de Λ-módulos graduados.

$\{C^n\}$, obtendremos conceptos duales; hablaremos de *cocadenas*, de *cohomología de una cocadena* etc.

9

C,D,E cadenas en CC. La categoría de complejos de cadenas es abeliana; luego, podemos formar sucesiones exactas cortas de objetos de CC,

$0 \to C \to D \to E \to 0$

10

TEOREMA. Sea $0 \to C \to D \to E \to 0$ una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un homomorfismo $\partial_n: H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$\ldots \to H_n(C) \to H_n(D) \to H_n(E) \to H_{n-1}(C) \to H_{n-1}(D) \to H_{n-1}(E) \to \ldots$

En 1941, Hurewicz, por vez primera combinó homomorfismos conocidos en cohomología en una sucesión de la forma

$\ldots \to H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y) \to H^{n-1}(X\text{-}Y) \to H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(X\text{-}Y) \to \ldots$

Eckmann, Ehresmann y Feldbau.

11

Hasta 1947 en que Kelley y Pitcher definieron el término *sucesión exacta*.

Álgebra Homológica. Cartan y Eilenberg 1956.

Whitney 1938 producto tensorial de grupos conmutativos.

Ext(G,N); Hom(G,N), Ext(G,N) o G O N donde O era la notación para el producto tensorial actual.

12

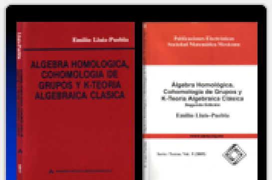
Funtor, Categoría 1945. Morfismo.

Módulos proyectivos e inyectivos.

Funtores derivados. $\operatorname{Ext}^n_\Lambda$ y $\operatorname{Tor}_n^\Lambda (M,N)$.

Resolución libre proyectiva de Hopf en 1945.

13



www.psomm.org.mx

14

Homotopía

homeomorfismo

Teoría de Homotopía 1930

15

$I^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1\}$ el *cubo de dimensión n*.

$\Delta^{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1 \text{ y } \sum x_i = 1\}$ el *simplejo de dimensión n*.

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ la *bola de dimensión n*.

Interior de I^n es $\operatorname{int} I^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid 0 < x_i < 1\}$.

Frontera de I^n es $\partial I^n = I^n - \operatorname{int} I^n$.

16

Denotemos con $\hat{I}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_i \le 1\}$.

$D = B^2$ el *disco en el plano R^2*.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la *esfera de dimensión n-1*.

17

Sean U y V subespacios de un espacio topológico X, decimos que U *se puede deformar* en V si existe una función continua

$F: U \times I \to X$ tal que $F(u,0) = u$, $\forall u \in U$, $\forall t \in I$, $u \mapsto F(u,t)$

es un homeomorfismo de U con un subespacio de X y cuando t=1, este subespacio es V.

F se llama *isotopía* de U en V.

18

Sean X,Y espacios topológicos. Una *homotopía* entre X y Y es una función continua $F: X \times I \to Y$. Para cada $t \in I$ se tiene una función $F_t: X \to Y$ dada por $F_t(x) = F(x,t)$ $\forall x \in X$.

En 1911 Brouwer define en forma general el concepto de homotopía entre dos funciones continuas.

Hasta 1930 se utilizó principalmente como una herramienta en las demostraciones de los teoremas en homología.

Dos funciones continuas $f,g:X\to Y$ son *homotópicas* si existe una homotopía $F:X\times I\to Y$ tal que $F_0=f$ y $F_1=g$.

En otras palabras, f puede deformarse continuamente en g a través de F_t.

Si f es homotópica a g escribiremos $f\sim g$ o bien $F:f\sim g$.

$\sim$ es una relación de equivalencia.

19

Definición. Sea $A\subset X$ un subespacio de un espacio topológico X. (X,A) denotará una pareja de espacios si $A\subset X$. Una *función continua* entre parejas $f:(X,A)\to(Y,B)$ es una función continua $f:X\to Y$ tal que $f(A)\subset B$.

Denotaremos con $Top^{(2)}$ la categoría de parejas y funciones continuas de parejas. Si identificamos X con $(X,\emptyset)$ y $f:X\to Y$ con el correspondiente $(X,\emptyset)\to(Y,\emptyset)$ obtenemos un funtor $Top \to Top^{(2)}$.

Así, identificaremos a Top con una subcategoría plena de $Top^{(2)}$.

20

Hemos partido el conjunto $C(X,Y)$ de funciones continuas $f:X\to Y$ en clases de equivalencia bajo la relación $\sim$. Llamaremos *clases de homotopía* a dichas clases de equivalencia y el conjunto de clases de homotopía de X en Y lo denotaremos con $[X,Y]$.

El concepto de *homotopía* nos da lugar a una clasificación de los espacios topológicos más gruesa que la del concepto de homeomorfismo pero que es menos difícil de manejar. También denotaremos con $[f]$ a la clase de homotopía de f y con Top_h la categoría Top con morfismos $Mor(X,Y)=[X,Y]$.

21

Espacios punteados (X,x_0) o $(X,*)$ donde x_0 o $*$

Forman una categoría Top_* cuyos objetos son los espacios punteados (X,x_0) y cuyos morfismos son funciones continuas $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ tales que $f:X\to Y$ es continua y $f(x_0)=y_0$.

Una *homotopía* entre dos de tales morfismos f,g es, por definición, una función continua

$F:(X,x_0)\times I\to(Y,y_0)$ tal que

$F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$ y $F(x_0,t)=y_0$ $\forall t\in I$.

22

F define una relación de equivalencia, $[f]$ denotará la clase de equivalencia de f y $[(X,x_0);(Y,y_0)]$, o simplemente $[X;Y]$, denotarán el conjunto de clases de equivalencia.

Así tenemos una categoría Top_{h*} cuyos objetos son los de Top_* y cuyos morfismos son

$Mor((X,x_0),(Y,y_0))=[(X,x_0);(Y,y_0)]$.

23

Denotemos con $\pi_n(X,x_0)$ para $n\geq 0$, el conjunto de clases de homotopía $[(I^n,\partial I^n);(X,x_0)]$ donde para $n=0$, $(I^0,\partial I^0)=(x_0,\emptyset)$.

Existe una correspondencia biunívoca entre

$\pi_n(X,x_0)$ y $[(S^n,s_0);(X,x_0)]$

donde s_0 denota el polo norte de S^n.

24

Consideremos $\pi_1(X,x_0)=[(S^1,s_0);(X,x_0)]$.

Un representante de una clase de este conjunto se llama *lazo* y puede considerarse como una función continua $\ell:[a,b]\to X$ tal que $\ell(a)=\ell(b)=x_0$.

Definimos una operación binaria en $\pi_1(X,x_0)$ mediante la yuxtaposición $\ell=\ell_1\circ\ell_2$ de dos lazos

25

$[\ell_1\circ\ell_2]$ depende solamente de las clases $[\ell_1]$ y $[\ell_2]$ y si $[\ell_1\circ\ell_2]=[\ell_1]\circ[\ell_2]$ se tiene definida una estructura de grupo no conmutativo en general.

El grupo $(\pi_1(X,x_0),\circ)$ se llama *grupo fundamental* de X en x_0.

Poincaré 1895, $[(S^1,s_0);(X,x_0)]$, grupo no conmutativo.

$[(S^n,s_0);(X,x_0)]$, Cech en 1932, quien mencionó que Dehn ya había pensado en ella, pero que no la publicó.

$\pi_n(X,x_0)$ para $n\geq 2$ es conmutativo. Hopf entre 1926 y 1935 sobre las funciones continuas en esferas comenzó la Teoría de Homotopía.

26

$\pi_1(X,x_0)$ depende del punto base x_0, así que, dada una función continua $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ definimos una función

$\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ mediante $f_*([\ell])=[f\circ\ell]$.

$f\circ\ell$ es un lazo y depende solamente de $[\ell]$ y por lo tanto f_* está bien definido.

Es inmediato verificar que π_1 es un funtor covariante $\pi_1:Top_*\to Gr$.

27

Teorema. Si $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ una equivalencia homotópica entonces

$\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$

es un isomorfismo.

Un espacio punteado (X,x_0) es *contráctil* si la inclusión $i:(\{x_0\},x_0)\to(X,x_0)$ es una equivalencia homotópica.

Las homotopías en $\pi_1(X,x_0)$ son homotopías de I relativas a 0 y 1.

28

Se define una homotopía entre dos funciones continuas de parejas $f,g:(X,A)\to(Y,B)$, denotada $f\sim g$ si existe una función continua

$F:(X\times I,A\times I)\to(Y,B)$ tal que $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$.

F define una relación de equivalencia y $[(X,A);(Y,B)]$ denotará el conjunto de clases de homotopía.

Así tenemos una categoría Top_h^2 cuyos objetos son los de Top^2 y cuyos morfismos están dados por

$Mor((X,A),(Y,B))=[(X,A);(Y,B)]$.

29

Diremos que las parejas de espacios (X,A) y (Y,B) son del mismo tipo de homotopía si existen funciones continuas $f:(X,A)\to(Y,B)$ y $g:(Y,B)\to(X,A)$ tales que $g\circ f\sim 1_{(X,A)}$ y $f\circ g\sim 1_{(Y,B)}$.

En tal caso decimos que f es una equivalencia homotópica y la denotamos con $(X,A)\sim(Y,B)$. Casi todos los invariantes de la Topología Algebraica son invariantes del tipo de homotopía y no solamente del concepto de homeomorfismo. Este concepto fue definido por Hurewicz en 1935.

30

Proposición. Si (X,x_0) es contráctil entonces $\pi_1(X,x_0)=0$.

Por ejemplo, la bola (B^n,s) es contráctil $\forall n\geq 0, s\in B^n$ y por lo tanto $\pi_1(B^n,s)=0$. También $\pi_1(R^n,x)=0$ $\forall n\geq 0$, $x\in R^n$.

Sea $A\subset X$ un subespacio, veremos cómo relacionar $\pi_n(A,*)$ con $\pi_n(X,*)$. Esto se hace definiendo nuevos grupos $\pi_n(X,A,*)$ que miden la discrepancia.

31

Existe una sucesión exacta

$\pi_n(A,*)\to\pi_n(X,*)\to\pi_n(X,A,*)\to$

$\to\pi_{n-1}(A,*)\to\pi_{n-1}(X,*)\to\pi_{n-1}(X,A,*)$

$\to\ldots\ldots\to\pi_0(A,*)\to\pi_0(X,*)$

llamada *sucesión exacta larga de homotopía*.

J.H.C. Whitehead fue el primero en considerar esta sucesión en 1945 y probó que era exacta.

32

33

K-Teoría Algebraica.

- Monoide conmutativo sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera.
- 1957 Grothendieck
- Asociarle a un monoide conmutativo M, un grupo conmutativo K(M), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides $\varphi:M\to K(M)$ tal que para cualquier grupo conmutativo G, cualquier homomorfismo de monoides $f: M\to G$ se factoriza en forma única como

$f: M\to K(M)\to G$.

34

- El grupo de Grothendieck 1958.
- 1959 Atiyah y Hirzebruch.

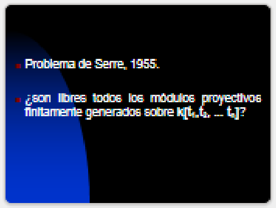
Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo X.

- Grupo de Grothendieck $K^0(X)$. $K^{-n}(X)$.
- La periodicidad de Bott $K^n(X)\cong K^{n+2}(X)$ y es utilizada para definir $K^n(X)$ para $n\in Z$. K-Teoría Topológica.
- Teorema de Atiyah-Singer

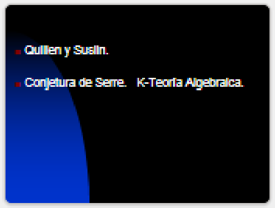
35

- Resultado de Serre, Swan, 1962. Traducir conceptos topológicos en algebraicos.
- La categoría de los haces vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde $\Lambda=C(X)$.
- Definición de $K(\Lambda)$ ó $K_0(\Lambda)$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados.
- $K_0(\Lambda)$ Λ-módulos proyectivos.

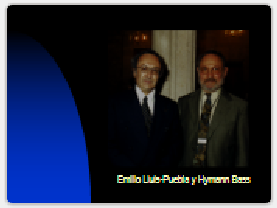
36



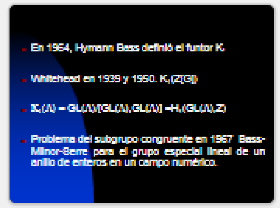
37



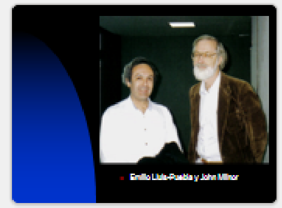
38



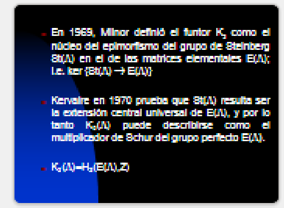
39



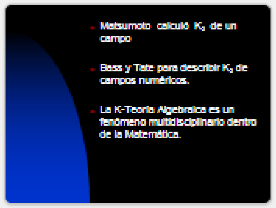
40



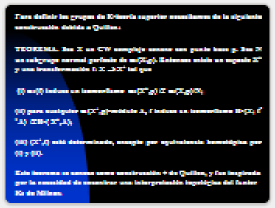
41



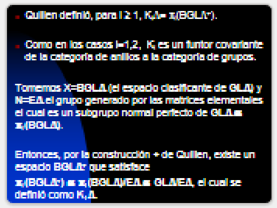
42



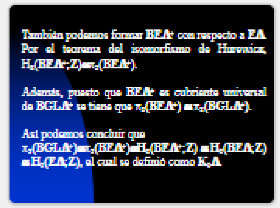
43



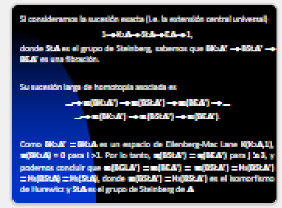
44



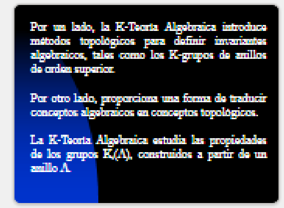
45



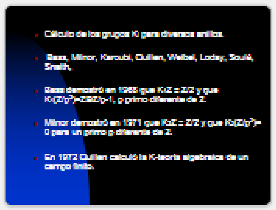
46



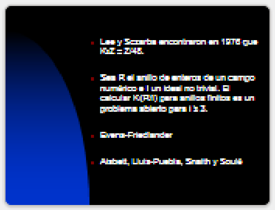
47



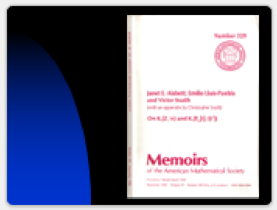
48



49

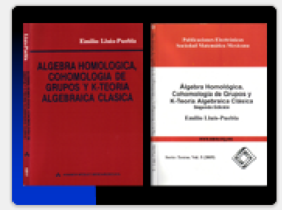


50



51

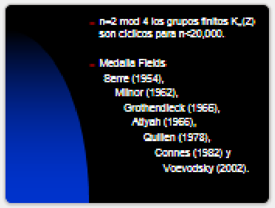
52



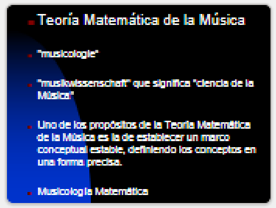
53

54

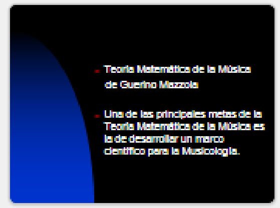
55



56

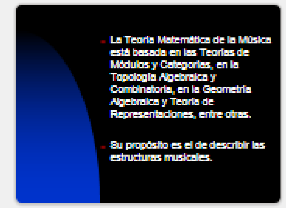


57

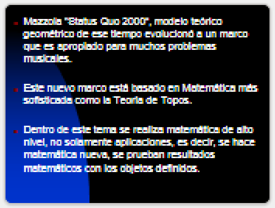


58

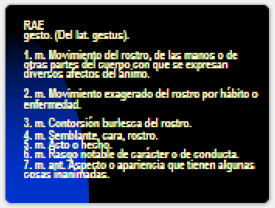
59



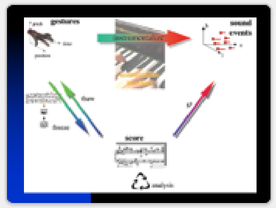
60



61

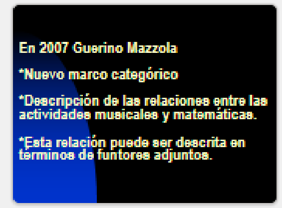


62

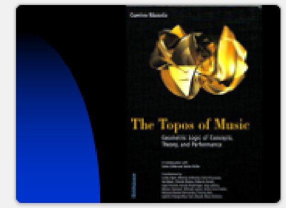


63

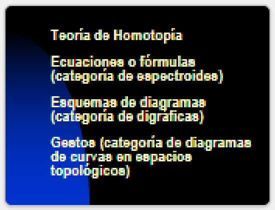
64



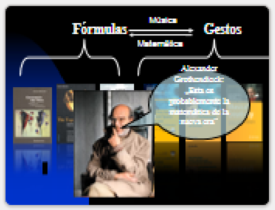
65



66

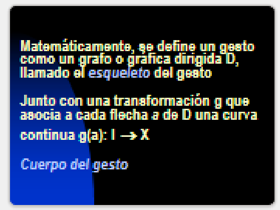


67

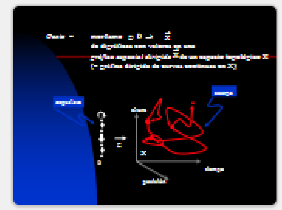


68 ★

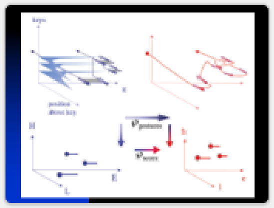
69



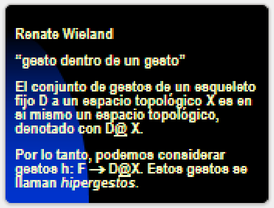
70


71 ★

72



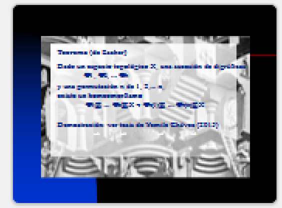
73



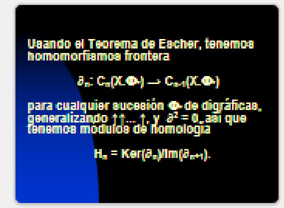
74

75

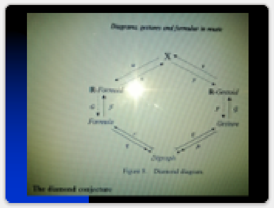
76



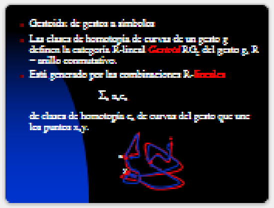
77



78

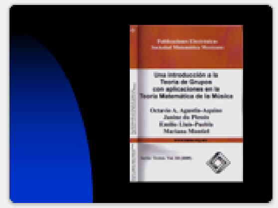


79

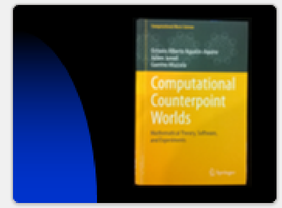


80

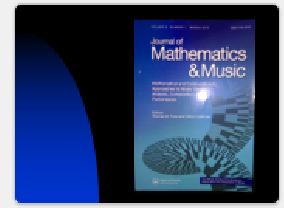
81



82

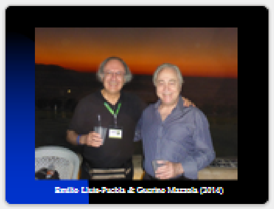


83



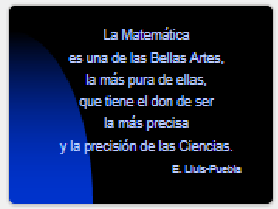
84

85



86

87



88

89